

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ МОДЕЛЕЙ (2017)

Программа курса

1. Сигнатура ("язык 1-го порядка"). Термы и формулы. Лемма об однозначном анализе.
2. Модель сигнатуры ("структура"). Оцененные термы и формулы; их значения в данной модели.
3. Теория 1-го порядка. Модель теории. Примеры: чистая теория равенства, теория линейных порядков, теория абелевых групп. Нормальная модель для сигнатуры с равенством.
4. Элементарная теория данной структуры. Элементарная эквивалентность моделей. Эквивалентность теорий.
5. Δ -элементарные и элементарные классы моделей. "Соответствие Галуа" между теориями и классами моделей.
6. Совместная (выполнимая) теория. Отношение логического (семантического) следования. Полная теория. Элементарная эквивалентность моделей полной теории. "Максимальность" совместной полной теории.
7. Гомоморфизм структур. Изоморфизм. Преобразование значений оцененных термов при гомоморфизме. Преобразование значений оцененных формул при изоморфизме и формул без равенства при сюръективном гомоморфизме.
8. Определимые предикаты и отношения в данной структуре. Инвариантность определимых предикатов при автоморфизмах.
9. Элементарная эквивалентность изоморфных моделей.
10. Стандартные теории равенства. Лемма о нормализации.
11. Сильно категоричные теории с равенством. Полнота сильно категоричной теории. Примеры сильно категоричных теорий.
12. Сильная категоричность элементарной теории конечной модели. Следствие: модель, элементарно эквивалентная конечной модели M , изоморфна M .
13. Простые формулы; приведение формул без функциональных символов к простому виду.
14. Кванторный ранг. n -эквивалентность структур. Игра Эренфойхта: позиция, партия, выигрышная стратегия. Игровая n -эквивалентность структур. Индуктивное определение игровой n -эквивалентности.
15. Нормальные формы Хинтикки. Теорема Эренфойхта -- Фраиссе -- Хинтикки. Характеризация элементарной эквивалентности в терминах игр.
16. Теорема Хинтикки о нормальных формах.
17. n -эквивалентность моделей мощности не ниже n в сигнатуре $\{=\}$. Спектры формул в этой сигнатуре.
18. Лемма о стабилизации. Кванторная глубина теории.
19. Разрешимость перечислимой теории конечной глубины в конечной сигнатуре. Примеры теорий конечной глубины.

20. Бесконечные игры Эренфойхта. Игровой критерий изоморфности счетных моделей. ω -категоричность теории неограниченных плотных линейных порядков (теорема Кантора).
21. Лемма об n -эквивалентности конечных линейных порядков с отмеченной точкой. Мощностной критерий n -эквивалентности конечных линейных порядков (доказательство достаточного условия).
22. Полнота теории неограниченных дискретных линейных порядков.
23. Инъективный гомоморфизм (вложение). Подструктура. Сохранение значений бескванторных формул при вложениях.
24. Элементарные вложения. Тест Тарского – Вота.
25. Сколемовские функции. Сколемовская оболочка. Теорема Лёвенгейма – Сколема – Тарского о спуске.
26. Фinitно выполнимые теории. Максимальные теории. Расширение фinitно выполнимой теории до максимальной фinitно выполнимой (“лемма Линденбаума”).
27. Свидетели. Теории Хенкина. Расширение фinitно выполнимой теории до фinitно выполнимой теории Хенкина.
28. Каноническая модель максимальной фinitно выполнимой теории Хенкина.
29. Теорема компактности.
30. Теорема Лёвенгейма – Сколема о подъеме. Примеры не Δ -элементарных классов.
31. Категоричность в данной мощности. Полнота категоричных теорий (признак Лося – Вота).
32. Диаграмма и элементарная диаграмма. Равносильность [элементарной] вложимости и выполнимости [элементарной] диаграммы. Теорема Левенгейма – Сколема – Тарского о подъеме.
33. Нестандартные модели арифметики. Неопределимость сложения в $(\mathbb{N}, <)$.
34. Сохранение истинности универсальных формул для подструктур. Универсально аксиоматизируемые теории.
35. Лемма о свежих константах.
36. Универсальный фрагмент теории; его модели. Критерий универсальной аксиоматизируемости (теорема Тарского – Лося).
37. Характеризация формул с параметрами, эквивалентных универсальным. Характеризация замкнутых формул, эквивалентных экзистенциальным.
38. Теорема Робинсона об универсальных формулах в теории.
39. Экзистенциальные расширения. Лемма Кейслера – Чэна.
40. Объединение цепи моделей. Теорема Тарского – Вота об элементарных цепях. Теорема Чэна – Лося – Сушко (формулировка).
41. Модельная полнота. Критерий Робинсона.

Список литературы

1. Справочная книга по математической логике. Часть 1. Теория моделей. М. Наука, 1982.
2. Н.К. Верещагин, А.Х. Шень. Лекции по математической логике и теории алгоритмов, *Часть 2. Языки и исчисления*. 4-е изд., испр., М.: МЦНМО, 2012.
<http://www.mcsme.ru/free-books/>
3. Бруно Пуаза. Курс теории моделей.
<https://www.math.wisc.edu/~lempp/poizat/poizat1251.html>
4. W. Hodges. Model theory. Cambridge University Press, 1993.
5. D. Marker. Model theory. Springer, 2002.
6. Д. Кейслер, Ч. Чэн. Теория моделей. М. Мир, 1977.
7. Д. Сакс. Теория насыщенных моделей. М. Мир, 1976.