Лекция 15. Преобразование Фурье обобщенных функций

1 Классическое преобразование Фурье.

a.

Определение 1 *Для функций $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ определено преобразование Фурье:*

$$\mathcal{F}f(\alpha) = \int f(x)e^{-i\alpha x}dx$$

Обозначения мультииндексные. Этот оператор непрерывно продолжается на $L^2(\mathbb{R}^n)$ю

b. Формула Планшереля.

$$||\mathcal{F}f||^2 = (2\pi)^n ||f||^2.$$

c. Формула обращения.

$$\mathcal{F}^{-1}f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int f(\alpha)e^{+i\alpha x}d\alpha$$

d. $\mathcal{F}(D^k f) = (+i\alpha)^k \mathcal{F}(f)$.

Следствие 1 $\mathcal{F}(p(D)f) = p(+i\alpha)\mathcal{F}f$.

2 Пространство Шварца.

Определение 2 *S - пространство бесконечно гладких функций на $\mathbb{R}^n$, все производные которых убывают быстрее любой степени на бесконечности.*

$$S = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) |\ \forall\ k, \alpha, x^k D^\alpha \varphi \to 0,\ x \to \infty\}$$

Сходимость в $S : \varphi_n \to \varphi$ в $S \Leftrightarrow\ \forall k, \alpha,\ x^k D^\alpha \varphi_n$ on $\mathbb{R}^k$.

3 Преобразование Фурье обобщенных функций.

Определение 3 *S' - пространство линейных непрерывных функций на S.*

Замечание 1 $D \subset S \Rightarrow S' \subset D'$.

Определение 4 *(основное) Пусть $f \in S'$. Тогда*

$$(\mathcal{F}f, \varphi) = (f, \mathcal{F}\varphi) \tag{1}$$

для любых $\varphi \in S$.

Задача 1 *Пусть $f \in D$, $\varphi \in S$. Тогда верно* (1).

Этот факт служит мотивировкой определения.

4 Примеры.

a. $\mathcal{F}\delta \equiv 1$.
Сделать это как задачу.
b. $\mathcal{F}(1) = (2\pi)^n\delta$

$$(\mathcal{F}(1), \varphi) = (1, \mathcal{F}(\varphi)) = \int \mathcal{F}(\varphi) = (2\pi)^n\varphi(0)$$

по формуле обращения.

5 Формула обращения.

Предложение 1 $(\mathcal{F}^{-1}f, \varphi) = (f, \mathcal{F}^{-1}\varphi)$.

Доказательство $\mathcal{F}^{-1}f = g$, $\varphi = \mathcal{F}\psi$

$$(g, \varphi) = (g, \mathcal{F}\psi) = (\mathcal{F}g, \psi) = (f, \psi) = (f, \mathcal{F}^{-1}\varphi)$$

□

6 Дифференцирование.

Предложение 2 $\mathcal{F}(D^k f) = (i\alpha)^k\mathcal{F}(f)$

Доказательство $n = 1, k = 1$

$(\mathcal{F}(f'), q) = (f', \mathcal{F}\varphi) = -(f, (\mathcal{F}\varphi)') = -(f, (-i\alpha)\mathcal{F}(\varphi)) = (f, i\alpha\mathcal{F}\varphi) = (i\alpha f, \mathcal{F}\varphi) = (i\alpha\mathcal{F}(f), \varphi)$.

□

Следствие 2 $\mathcal{F}(p(D)f) = p(i\alpha)\mathcal{F}(f)$.

7 Применение к нахождению фундаментальных решений.

$$p(D)f = \delta$$

$$p(i\alpha)\mathcal{F}(f) = 1$$

$$\mathcal{F}(f) = \frac{1}{p(i\alpha)}$$

Пусть $p(i\alpha) \neq 0$ на $\mathbb{R}$. Тогда $f = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{p(i\alpha)}\right)$ "(в классическом смысле)" [если достаточно быстро убывает]

Пример 1 *DX = -X" + X. $P^{-1}(i\alpha) = \frac{1}{\alpha^2+1}$*

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{\alpha^2+1}\right) = 2\pi\mathcal{F}\left(\frac{1}{\alpha^2+1}\right) = \frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

8 Теорема Хермандера.

Теорема 1 *Всякий линейный оператор с постоянными коэффициентами имеет фундаментальное решение.*

9 Задача Коши для уравнения теплопроводности.

$$u_t = \Delta u,\ x \in \mathbb{R}^n,\ u|_{t=0} = \varphi$$

$$v = \mathcal{F}_x u$$

$$v_t = -\alpha^2 v,\ v|_{t=0} = \mathcal{F}\varphi$$

$$v(t,\alpha) = (\mathcal{F}\varphi)(\alpha)e^{-\alpha^2 t}$$

$$\mathcal{F}^{-1}v(t,\alpha) = K(t,x) *_x \varphi(x),$$

$$K(t,x) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

$K(t,x)\theta(t)$ - фундаментальное решение уравнения теплопроводности; θ - функция Хэвисайда.