Теория функций комплексного переменного – 2017
Листок 6

срок сдачи 16.06.2017

1. Вычислите следующие сингулярные интегралы в смысле главного значения:

а) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{z^2}{z^3-1} dz$;

б) $\displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{t^2}{\sqrt{a^2-t^2}} \frac{dt}{t-x} \quad (a>0,\ -a<x<a)$;

2. Докажите, что если $u(x), v(x)$ суть предельные значения на вещественной оси действительной и мнимой частей аналитической в верхней полуплоскости функции $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, то выполняются соотношения

$$v(x) = -\frac{1}{\pi}\,\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t)}{t-x}\,dt + v(\infty), \quad u(x) = \frac{1}{\pi}\,\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(t)}{t-x}\,dt + u(\infty).$$

Гармонической мерой $\omega(z;\gamma,D)$ граничной дуги $\gamma \subset \partial D$ в точке z относительно области D называется ограниченная, гармоническая в D функция, равная 1 во внутренних точках дуги γ и 0 во внутренних точках остальной части границы.

3. Докажите, что $0 \le \omega(z;\gamma,D) \le 1$ при всех $z \in \overline{D}$. В каких случаях может достигаться равенство, если z лежит внутри области D?

4. Найдите гармонические меры:

а) D – верхняя полуплоскость, γ – отрезок $[-1,1]$;

б) D – круг $|z|<R$, γ – полуокружность $|z|=R$, $\operatorname{Re} z > 0$;

в) D – полукруг $|z|<R$, $\operatorname{Re} z > 0$, γ – диаметр (отрезок $[-R,R]$);

г) D – кольцо $r<|z|<R$, γ – окружность $|z|=r$.

Функцией Грина G односвязной области D называется заданная на $D\times D$ функция $G(z,\zeta) = \log|z-\zeta| + g(z,\zeta)$ такая, что:

1) $G(z,\zeta) = G(\zeta,z)$ и $G(z,\xi) = 0$ при любых $z \in D$ и $\xi \in \partial D$;

2) функция $g(z,\zeta)$ непрерывна в $D\times D$ и непрерывна по ζ в $\overline{D}$ при всех $z \in D$;

3) функция $g(z,\zeta)$ гармонична по z при всех $\zeta \in D$ и гармонична по ζ при всех $z \in D$.

5.

а) Найдите функцию Грина, если D – круг радиуса R с центром в $a \in \mathbb{C}$.

б) Найдите функцию Грина, если D – верхняя полуплоскость.

в) Докажите, что функция Грина единственна и дается формулой

$$G(z,\zeta) = \log\left|\frac{w(z) - w(\zeta)}{1 - w(z)\overline{w(\zeta)}}\right|,$$

где $w(z)$ – взаимно однозначное конформное отображение (односвязной) области D на единичный круг.

г) * Докажите, что функция Грина дает универсальное решение граничной задачи Дирихле в области D с помощью формулы

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\oint_D u(\xi)\frac{\partial}{\partial n_\xi}G(z,\xi)\,|d\xi|$$

где $\partial/\partial n_\xi$ – нормальная производная по второму аргументу (единичные нормальный вектор считается направленным во внешность области).