

## Группы и алгебры Ли II. Семинар 10.05.17

**Задача 1.** Опишите орбиты действия группы Ли  $G$  на многообразии  $M$ , их стабилизаторы и размерности, для следующих случаев:

- а)  $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ ,  $M = \mathbb{R}^n$  (стандартное действие).
- б)  $G \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$  — группа (нестрого) верхнетреугольных матриц,  $M$  — то же, что и выше.
- в)  $G = \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$  — группа линейных преобразований плоскости,  $M = \mathrm{Sym}^k \mathbb{R}^2$  — пространство однородных форм степени  $k$  для  $k = 2, 3, 4$ .
- г)  $G = \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$  — группа линейных преобразований пространства,  $M = \mathrm{Sym}^k \mathbb{R}^3$  — пространство однородных форм степени  $k$  для  $k = 2, 3$ .
- д)  $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ ,  $M = \mathrm{Sym}^2 \mathbb{R}^n$  — пространство симметричных  $(n \times n)$ -матриц, с действием  $(g, X) \mapsto g^T X g$ .
- е)  $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}^m) \times \mathrm{GL}(m, \mathbb{R}^n)$ ,  $M = \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  — пространство  $(m \times n)$ -матриц, с действием  $((g_1, g_2), X) \mapsto g_1^{-1} X g_2$ .

**Задача 2.** Какова жорданова нормальная форма у матрицы общего вида со всеми равными между собой собственными значениями? Классификация жордановых нормальных форм — изучение орбит следующего действия:  $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ ,  $M = \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$  — пространство всех  $(n \times n)$ -матриц, с действием  $(g, X) \mapsto g^{-1} X g$ . Ответьте на вопросы задачи 1 для следующих двух случаев.

- а) (регулярный) матрица имеет ровно одну жорданову клетку размера  $n$ ;
- б) (субрегулярный) матрица имеет две жордановых клетки размера  $(n - 1)$  и  $1$  с равными собственными значениями.

**Задача 3.** Для всех перечисленных выше случаев, выберите трансверсаль к каждой орбите и опишите ее разбиение по типу орбит. В случае, когда коразмерность орбиты не выше 3, изобразите получившееся разбиение на рисунке