Введение в теорию моделей (весна 2017)

В.Б. Шехтман

Лекция 11 (содержание)

Теорема компактности

Предложение 11.1 *Пусть T — финитно выполнимая теория в сигнатуре L, тогда существует сигнатура $L^* \supset L$ и теория $S \supset T$ в сигнатуре L^*, такие что*

- $|L^*| = \max(|L|, \aleph_0)$,
- *S максимальна,*
- *S — теория Хенкина,*
- *S финитно выполнима.*

Лемма 11.2 *Пусть T, S — как в предложении 11.3. Тогда S имеет модель мощности $k = |L^*|$.*

Доказательство (план) Для доказательства строим *каноническую модель* M теории S следующим образом.

Ее носитель $\underline{M}$ состоит из дубликатов всех замкнутых термов сигнатуры L^* (формально: имеется биекция между термами t и их дубликатами $\underline{t}$). Символы L^* интерпретируются так:

- $$c_M := \underline{c}$$
  для каждой константы c,
- $$f_M(\underline{t_1}, \ldots, \underline{t_n}) := \underline{f(t_1, \ldots, t_n)}$$

для каждого функционального символа f^n и замкнутых термов $t_1, \dots, t_n$,

•
$$P_M(\underline{t_1}, \dots, \underline{t_n}) := \begin{cases} 1, \text{ если } P(t_1, \dots, t_n) \in S, \\ 0 \text{ иначе }. \end{cases}$$

для каждого предикатного символа P^n и замкнутых термов $t_1, \dots, t_n$.

Затем по индукции доказываем 2 утверждения.
Утверждение 1 Если t — замкнутый терм L^*, то $|t|_M = t$.
Утверждение 2 Если φ — замкнутая формула L^*, то

$$|\varphi|_M = \begin{cases} 1, \text{ если } \varphi \in S, \\ 0 \text{ иначе }. \end{cases}$$

Из утверждения 2 следует, что $M \vDash S$. ■

Теорема 11.3 *(теорема компактности) Пусть L — сигнатура, $k = \max(|L|, \aleph_0)$.*

(1) Если T — финитно выполнимая теория в сигнатуре L, то T имеет модель мощности k.

(2) Если L — сигнатура с равенством и T — финитно нормально выполнимая теория в сигнатуре L, тогда T имеет нормальную модель мощности $\leq k$.

Доказательство (1) По предложению 11.3 расширим T до S. По лемме 11.2, S имеет модель мощности k.

(2) Поскольку T финитно нормально выполнима, то теория $T \cup Eq_L$ финитно выполнима. По (1), она имеет модель мощности k. Тогда, по лемме о нормализации, получаем нормальную модель T мощности $\leq k$. ■

В дальнейшем рассматриваются только теории с равенством и нормальные модели.

Лекция 12 (содержание)

Следствия теоремы компактности

Теорема 12.1 *(теорема Лёвенгейма — Сколема о подъеме) Пусть T — теория в сигнатуре L, $k = \max(|L|, \aleph_0)$. Если для любого конечного n теория имеет модель мощности $> n$, то для любого $\lambda > k$ T имеет модель мощности λ.*

Следствие 12.2 *Пусть T — теория в сигнатуре L, $|L| \leq \aleph_0$. Если для любого конечного n теория T имеет модель мощности $> n$, то T имеет счетную модель.*

Отсюда следует, например, что класс всех конечных полей (в сигнатуре колец) — не Δ-элементарный.

Теорема 12.3 *(признак полноты Лося – Вота) Пусть T — теория в сигнатуре L, $k \geq \max(|L|, \aleph_0)$. Если k-категорична и не имеет конечных моделей, то T полна.*

Элементарные расширения

Определение 1 *Пусть M — модель сигнатуры L.*

Диаграммой *модели M называется следующая теория в сигнатуре $L \cup M$:*

$D(M) := \{\varphi(\mathbf{a}) \mid \varphi(\mathbf{x})$ — *атомарная формула в* L, $\mathbf{a}$ — *кортеж элементов из* $M\}$

$\cup\{\neg\varphi(\mathbf{a}) \mid \varphi(\mathbf{x})$ — *атомарная формула в* L, $\mathbf{a}$ — *кортеж элементов из* $M\}$.

Элементарной диаграммой *модели M называется следующая теория в сигнатуре $L \cup M$:*

$$E(M) := \{\varphi(\mathbf{a}) \mid \varphi(\mathbf{x}) \text{ — формула в } L,\ \mathbf{a} \text{ — кортеж элементов из } M\}$$

$$\cup\{\neg\varphi(\mathbf{a}) \mid \varphi(\mathbf{x}) \text{ — формула в } L,\ \mathbf{a} \text{ — кортеж элементов из } M\}.$$

Лемма 12.4 *Пусть M — L-структура, M' — $(L \cup M)$-структура. Тогда*

(1) Если $M' \models D(M)$, *то* M *вложима в* $M'|L$.

(2) Если $M' \models E(M)$, *то* M *элементарно вложима в* $M'|L$.

Здесь $M'|L$ обозначает обеднение M' до сигнатуры L.

Теорема 12.5 *(Теорема Лёвенгейма – Сколема – Тарского о подъеме) Пусть* M *— бесконечная* L*-структура;* $k \geq |M|, |L|$. *Тогда* M *элементарно вложима в* L*-структуру мощности* k.

Доказательство $E(M)$ выполнима в M (если ее рассматривать в сигнатуре $L \cup M$). Тогда, по теореме 12.1, $E(M)$ имеет модель M' мощности k. По лемме 12.4, M элементарно вложима в $M'|L$. ■

Примеры

1. Стандартная модель $\mathbf{N}$ сигнатуры арифметики имеет счетное нестандартное расширение: к $E(\mathbf{N})$ надо добавить новую константу c и аксиомы $c \neq 0,\ c \neq 1,\ c \neq 2, \ldots$. По теореме 12.1, эта теория имеет счетную модель.

2. Рассматривая нестандартное расширение $\mathbf{N}^+$ структуры $(\mathbf{N}, <, S)$, можно показать, что в $(\mathbf{N}, <, S)$ не определимо сложение: существует автоморфизм $\mathbf{N}^+$, не сохраняющий четность стандартных натуральных чисел. Поэтому множество четных чисел не определимо в $(\mathbf{N}, <, S)$.