

Листок 2.

**Задача 1. ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПАСТУРА-МАРЧЕНКО.**

Плотность распределения собственных значений выборочной ковариационной матрицы  $N \times N$  имеет вид

$$f(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = Z^{-1} e^{-\frac{\beta}{2} \sum_{i=1}^N \lambda_i} \prod_{i=1}^N \lambda_i^{\beta a/2} \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta, \quad (1)$$

где  $\beta = 1, 2, 4$  и  $a = \alpha N$ . Предположим, что при  $N \rightarrow \infty$  случайная эмпирическая спектральная мера

$$L_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\lambda_i/N},$$

стремится к некоторой детерминистической мере  $L_\infty$  с конечным носителем, в том смысле, что для любой ограниченной непрерывной функции  $f(x)$  предел среднего вида  $N^{-1} \mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^N f(\lambda_i/N) \right)$  вычисляется как

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} \mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^N f(\lambda_i/N) \right) = \int f(x) dL_\infty(x).$$

- а) Стартуя с плотности (1) сформулируйте вариационную задачу о нахождении предельной эмпирической меры.
- б) Запишите решение вариационной задачи в виде интегрального уравнения и, продифференцировав его, с помощью формул Сохоцкого-Племеля запишите задачу Римана-Гильберта для преобразования Стильтьеса от  $L_\infty$ .
- в) Решите полученную задачу и, обратив преобразование Стильтьеса, выведите распределение Пастура-Марченко.

**Задача 2. ФОРМУЛА ГЕЙНЕ ДЛЯ УНИТАРНЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ.**

Пусть

$$P_n(x) = x^n + \dots, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

система унитарных многочленов, ортогональных относительно меры  $\alpha(x)$ ,

$$\int P_n(x) P_m(x) d\alpha(x) = h_n \delta_{n,m}.$$

Докажите, что  $P_n(x)$  можно представить в виде

$$P_n(x) = \frac{1}{n! D_{n-1}} \mathbb{E} \left[ \prod_{i=1}^n (x - x_i) \right],$$

где матожидание вычисляется относительно меры

$$\mu(dx_1 \times \dots \times dx_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2 d\alpha(x_1) \dots d\alpha(x_n),$$

и  $D_n = \det [\int x^{i+j} d\alpha(x)]_{0 \leq i, j \leq n}$ .

### Задача 3. ЛЕММА КРИСТОФЕЛЯ-ДАРБУ

Рассмотрите систему унитарных многочленов

$$p_n(x) = x^n + \dots,$$

ортогональных относительно веса  $w(x)$  с нормировкой

$$\langle p_k, p_m \rangle := \int p_k(x) p_m(x) w(x) dx = \delta_{k,m} h_m, \quad k, m = 0, 1, \dots,$$

которые удовлетворяют трёхчленным рекуррентным соотношениям

$$p_{k+1}(x) + (A_k - x)p_k(x) + B_k p_{k-1}(x) = 0,$$

где

$$A_k = \frac{\langle xp_k, p_k \rangle}{h_k} \quad \text{и} \quad B_k = \frac{h_k}{h_{k-1}}.$$

Пусть

$$\psi_n(x) := p_n(x) \sqrt{\frac{w(x)}{h_n}}$$

соответствующий базис Фурье, а

$$K_N(x, y) := \sum_{n=0}^{N-1} \psi_n(x) \psi_n(y)$$

проектор ранга  $N$ . Докажите формулы Кристофеля-Дарбу

$$K_N(x, y) = \gamma_N \frac{\psi_{N-1}(x) \psi_N(y) - \psi_N(x) \psi_{N-1}(y)}{y - x}$$

и

$$K_N(x, x) = \gamma_N (\psi'_N(x) \psi_{N-1}(x) - \psi_N(x) \psi'_{N-1}(x)),$$

где  $\gamma_k = \sqrt{h_k/h_{k-1}}$ .

### Задача 4. МАТРИЦА ЯКОБИ

В условиях предыдущей задачи бесконечная матрица вида

$$Q = \begin{pmatrix} A_0 & \gamma_1 & 0 & 0 & \cdot \\ \gamma_1 & A_1 & \gamma_2 & 0 & \cdot \\ 0 & \gamma_2 & A_2 & \gamma_3 & \cdot \\ 0 & 0 & \gamma_3 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

называется матрицей Якоби. Докажите следующие формулы для представления ортогональных многочленов и ядра

$$p_N(x) = \det_{N \times N}(x - Q), \quad K_N(x, y) = \frac{\sqrt{w(x)w(y)}}{h_{N-1}} \det_{(N-1) \times (N-1)} [(x - Q)(y - Q)],$$

где определители понимаются как главные миноры порядка  $N$ .

### Задача 5. АНСАМБЛЬ ЛАГЕРРА-ВИШЕРТА

Плотность распределения собственных значений ковариационных выборочных матриц из ансамбля Лагерра-Вишера имеет вид

$$f(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = Z^{-1} e^{-\frac{\beta}{2} \sum_{i=1}^N \lambda_i} \prod_{i=1}^N \lambda_i^{\beta a/2} \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j|^\beta,$$

где  $\lambda_i \in [0, \infty)$  (см. Листок 1.).

Используя многочлены Лагерра,  $L_n^{(a)}(x)$  (необходимые справочные сведения приведены в конце задачи), постройте корреляционное ядро  $K_N(x, y)$ , для случая  $\beta = 2$  и  $a \geq 0$ . Проведите его асимптотический анализ в различных пределах:

1. Выведите уравнение на производящую функцию многочленов Лагерра из трёхчленных рекуррентных соотношений и, решив его, покажите, что производящая функция имеет вид

$$G^{(a)}(x, t) := \sum_{k=0}^{\infty} L_k^{(a)}(x) t^k = \frac{\exp\left(-\frac{tx}{1-t}\right)}{(1-t)^{a+1}}.$$

Запишите интегральное представление многочленов Лагерра.

2. Исследуйте поведение полученного интеграла в пределе  $N \rightarrow \infty$ , считая что  $0 \leq a \leq \infty$  остается конечной величиной, и выведите предельные формулы для корреляционного ядра в различных скейлинговых пределах:

- (a) Покажите, что средняя плотность

$$\rho(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} K_N(Nx, Nx)$$

дается частным случаем распределения Пастура-Марченко. Его можно переписать как как четвертькруговой закон — половину полукруглого закона Вигнера. Объясните эту связь.

- (b) Покажите, что во внутренней части спектра,  $0 < w < 4$ , предельное корреляционное ядро

$$K_\infty^{\text{bulk}}(x, y) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho(w)} K_N\left(Nw + \frac{x}{\rho(w)}, Nw + \frac{y}{\rho(w)}\right)$$

не зависит от реверентной точки  $w$  и стремится к синус-ядру.

- (c) Покажите что при некотором выборе константы  $\sigma$  корреляционное ядро в окрестности правого края спектра (режим мягкого края, soft edge)) сходится к ядру Айри

$$\begin{aligned} K_{\infty}^{\text{soft edge}}(x, y) &:= \lim_{N \rightarrow \infty} N^{1/3} \sigma K_N(4N + \sigma N^{1/3}x, 4N + \sigma N^{1/3}y) \\ &= \frac{Ai(x)Ai'(y) - Ai(y)Ai'(x)}{x - y} \end{aligned}$$

$$K_{\infty}^{\text{soft edge}}(x, y) = K_{Airy}(x, y).$$

- (d) Покажите, что на левой границе спектра (в режиме жесткого края, hard edge scaling limit) корреляционное ядро сходится к ядру Бесселя

$$\begin{aligned} K_{\infty}^{\text{hard edge}}(x, y) &\doteq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{4N} K_N\left(\frac{x}{4N}, \frac{y}{4N}\right) \\ &= \frac{J_a(\sqrt{x})\sqrt{y}J'_a(\sqrt{y}) - J_a(\sqrt{y})\sqrt{x}J'_a(\sqrt{x})}{2(x - y)}. \end{aligned}$$

- (e) Убедитесь, что при  $a = \pm 1/2$  мы возвращаемся к четной и нечетной части синус ядра а в пределе  $a \rightarrow \infty$ , когда левый край отодвигается от твердой стенки, к ядру Эйри. Объясните почему.

Используйте следующие справочные формулы:

Многочлены Лагерра  $L_k^{(a)}(x)$  ортогональны в  $L_2([0, \infty), w(x)dx)$  с весом  $w(x) = x^a e^{-x}$ . Для решения достаточно знать коэффициент при старшем члене

$$L_n^{(a)}(x) = x^n \frac{(-1)^n}{n!} + \text{члены более низких порядков}$$

норму<sup>1</sup>

$$\langle L_n^{(a)}, L_m^{(a)} \rangle = \frac{\Gamma(n + a + 1)}{n!} \delta_{n,m},$$

а так же коэффициенты трехчленных рекуррентных соотношений

$$-(n + 1)L_{n+1}^{(\alpha)}(x) + (2n + \alpha + 1 - x)L_n^{(\alpha)}(x) - (n + \alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x) = 0.$$

Функции Эйри и Бесселя можно понимать в смысле их интегральных представлений, например

$$\begin{aligned} Ai(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(z t + t^3/3)} dt \\ J_a(z) &= \frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^a}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} \exp\left(t - \frac{z^2}{4t}\right) \frac{dt}{t^{a+1}}, \end{aligned}$$

или любых других. В последнем интеграле контур интегрирования начинается в  $-\infty - i0$ , заканчивается в  $-\infty + i0$  и обходит разрез функции  $t^{a+1}$ , проведенный вдоль отрицательной части действительной оси.

<sup>1</sup>Заметьте, что при таком традиционном определении, многочлены Лагерра не являются ни унитарными ни нормированными на единицу.