

Семинар 17

0. Докажите, что конечная группа всегда действует дискретно.
1. Докажите, что $SO(3)/SO(2) = S_2$. Можете ли Вы это обобщить?
2. Докажите, что фактор-пространство $SL(n, \mathbb{R})/SO(n)$ гомеоморфно пространству положительно определенных квадратичных форм от n переменных с определителем 1.
3. Пусть группа Γ дискретно и свободно действует на метрическом пространстве Y , сохраняя расстояния. Тогда для каждой точки $y \in Y$ существует такой шар B с центром в этой точке, что $\gamma B \cap B = \emptyset$ для всех $\gamma \in \Gamma$. Если Вы это докажете, то заодно поймете, почему проекция на факторпространство является в этом случае накрытием.
4. Рассмотрим дробно-линейное преобразование $g(z) = 2z + 1/z + 1$ вещественной проективной прямой и пусть Γ – циклическая группа проективных преобразований, порожденная преобразованием g . Дискретно ли действие группы Γ на проективной прямой? Можно ли удалить одну точку проективной прямой так, чтобы на оставшемся пространстве рассматриваемое действие стало дискретным? А две точки?
5. Построить разумную фундаментальную область для циклической группы Γ движений евклидовой плоскости, порожденной скользящим отражением. Что из себя представляет в этом случае фактор-пространство E^2/Γ ?