Краткое содержание лекций 2семестра

(лектор ОВ Шварцман)

Лекция 1

Классическое определение квадратичной формы над полем F, характеристика которого не равна 2),как однородного многочлена второй степени с коэффициентами из F/

.Матрица формы. Представление числа квадратичной формой Невырожденная квадратичная форма. Изотропный вектор. Изотропные и анизотропные квадратичные формы. Примеры: бинарные формы. Эквивалентные квадратичные формы .Как связаны матрицы эквивалентных квадратичных форм. Теорема :квадратичная форма эквивалентна диагональной.

Теорема: бинарная невырожденная форма над конечным полем представляет 1

. Ортогональная группа квадратичной формы. Примеры ортогональных групп формы $X^2+Y^2$ и формы$X^2-Y^2$ над полем вещественных чисел.

Лекция 2

Пространства с билинейными формами. Матрица Грама билинейной формы.Симметричные и кососимметричные билинейные формы. Квадратичная форма, ассоциированная с симметричной билинейной формой. Радикал билинейной формы. Квадратичные и симплектические пространства

Ортогональность.Ортогонал. Ортогональное дополнение к подпространству .Ортогональная прямая сумма

подространств.

Лекция 3.

Теорема о разложении квадратичного простраства в ортогональную прямую сумму одномерных.Примеры: разложение над полем вещественных и комплексных чисел. Канонический базис Сигнатура вещественного квадратичного пространства.

Теорема Сильвестра об инвариантности сигнатуры

Теорема о разложении симплектического пространства в ортогональную прямую сумму гиперболических плоскостей. Симплектический базис

Лекция 4.Классификация квадратичных пространств над R и C.

Классификация проективных квадрик.

Классификация симплектических пространств.Псевдоевклидовы пространства типа $E^{p,q}$. Положительные,отрицательные и изотропные подпространства в псевдоевклидовых пространствах.

Лекция5

Симметричные билинейные формы в евклидовом пространстве Самосопряженные операторы Теорема о существовании ортонормированного собственного базиса. Уравнения Квадрики в аффинном евклидовом пространстве

Лекция 6 Классификация квадрик в аффинном евклидовом пространстве с точностью до движений.

Что почитать:

1И.Р.Шафаревич,А.О.Ремизов,Линейная алгебра и геометрия, Физматлит 2009.

2И.М. Гельфанд ,Лекции по линейной алгебре, Наука 1971

3.А.И.Кострикин,Ю.И. Манин Линейная алгебра и геометрия ,Лань,2005

4.Г.Е.Шилов Конечномерные векторные пространства ,Наука 1

Лекция 7

Двойственные базисы. Теорема о том, Матрицы Грама двойственных базисов обратны друг другу. Применение этого факта в сферической геометрии. Две теоремы косинусов для сферических треугольников. Теорема синусов Неравенство треугольника в сферической геометрии. Площадь сферического треугольника.

Лекция 8 Что такое алгебра Клиффорда? Примеры алгебр Клиффорда размерности2 и 4.Комплексные числа и гамильтоновы кватернионы как примеры алгебр Клиффорда. Алгебра Грассмана (материал этой лекции не входит в программу итогового экзамена)

Лекция 9.Одномерная сферическая геометрия и однопараметрическая группа ее параллельных переносов .Полная группа движений окружности.

Геометрия пространства E^(1,1).Конус Лоренца изотропных векторов .Модель прямой Лобачевского на гиперболе. Однопараметрическая группа параллельных переносов

Прямой Лобачевского. Проективная модель Кэли-Клейна прямой Лобачевского.Метрика Гильберта.Полная группа движений прямой Лобачевского

Лекция 10.Группы симметрий аффинных кривых: эллипса и гиперболы. Группа Галилея скольжений параболы.Применение групп симметрий в задачах элементарной геометрии.

Лекция 11Отражения и трансвекции. Теорема о том, что любой элемент ортогональной группы невырожденного квадратичного пространства размерности n представим в виде произведения не более, чем (2n-1 ) отражений из группы. Группа Sp\_1=SL(2,R).Теорема о том,что группа SL(2,R) порождается трансвекциями(матрицами элементарных преобразований)

Лекция 12Геометрия прямых и плоскостей в псевдоевклидовом пространстве$E^2,1$.Конус отрицательных векторов и его проективизация как модель плоскости Лобачевского. Точки и прямые гиперболической плоскости в этой модели. Параллельные и расходящиеся прямые. Угол между полуплоскостями, образованными пересекающимися прямыми Критерий расходимости прямых. Общий перпендикуляр Растояние между расходящимися прямыми .Расстояние от точки до прямой.

Лекция 13 Гиперболические треугольники .Равенство треугольников .Равенство треугольников по трем углам. Теоремы косинусов для гиперболических треугольников .Теорема синусов.

Лукция 14.Примеры решения простейших задач гиперболической планиметрии Прямоугольные треугольники. Сумма углов гиперболического треугольника меньше развернутого угла .Существование треугольников с заданными углами.

Лекция 15 Теорема о медианах ,высотах и биссектрисах в гиперболическом треугольнике.Существование правильных прямоугольных гиперболических n-угольников .при n>4Угловой дефект как мера площади.

Лекция 16.Группа PO(2,1) как группа движений плоскости Лобачевского.Транзитивность действия на точках ,прямых и отрезках равной длины. Стабилизаторы точек и прямых.Классификация элементов группы O(2,1).

Лекция 17 Стабилизатор бесконечно удаленной точки. Геометрия орициклов

Литература

И.Р.Шафаревич,А.О.Ремизов,Линейная алгебра и геометрия, Физматлит 2009.

В.В. Прасолов Геометрия Лобачевского,МЦНМО,2014

Лекция 18 Одномерное комплексное проективное пространство. Группа PGL(2,C(=PSL(2,C))

Двойное отношение точек. Антипроективные преобразования .Группа Мебиуса .Инверсия как отражение в окружности. Аффинные прямые как окружности, проходящие через бесконечно удаленную точку

Лекция 19 Критерий принадлежности 4 точек окружности. Теорема о том, что проективная группа транзитивна на множестве окружностей Конформность проективных и антипроективных преобразований

Лекция 20 Верхняя полуплоскость как модель плоскости Лобачевского. Группа PSL(2,R) как группа сохраняющих ориентацию движений гиперболической плоскости в этой модели. Геометрическая

Классификация движений, сохраняющих ориентацию. Полная группа движений.

Лекция 21 Элемент длины и площади в модели верхней полуплоскости. Площадь треугольника.

Прямые как геодезические.Окружности на верхней полуплоскости( в смысле гиперболической метрики) совпадают с евклидовыми окружностями

Лекция 22 Эрмитово скалярное произведение. Унитарное пространство. Ортогональность. Теорема Грама Шмидта об ортогонализации флага Ортонормальные базисы. Эрмитовы матрицы Грама. Переход к другому базису. Неравенство Коши- Буняковского. Пример гильбертова пространства l\_2.Унитарный оператор.

Лекция 23.Линейный оператор в комплексном векторном пространстве обладает инвариантным флагом. Теорема Шура: комплексная матрица унитарно сопряжена треугольной. Два важных следствия: эрмитова матрица унитарно диагонализируема. Унитарная матрица унитарно диагонализируема.

Лекция 24.Овеществление комплексного линейного пространства.Эрмитова структура в комплексном векторном пространстве и дружественные ей ортогональная и симплектическая структуры в его овеществлении .

Литература: И.Р.Шафаревич,А.О.Ремизов,Линейная алгебра и геометрия, Физматлит 2009.

А.И.Кострикин,Ю.И.Манин Линейная алгебра и геометрия

Э.Б.Винберг Курс алгебры

К последнему морю..

Лекция 25 Дискретная группа преобразований. Дискретная подгруппа топологической группы.

Теорема о дискретности естественного действия дискретной подгруппы на группе сдвигами

Примеры дискретных подгрупп и дискретных действий Фундаментальная область для дискретной группы преобразований

Лекция 26.Что такое топологическая группа и что такое группа Ли(примеры)Однородное пространство группы Ли(примеры)Пространство полных решеток в евклидовом пространстве

Лекция 27.Теория приведения для полных решеток на евклидовой плоскости

Лекция 28 Области Вороного. Разбиения Вороного.Фундаментальные области Вороного-Дирихле

Лекция 29 Кристаллографические плоские группы в евклидовой и неевклидовой геометрии

Примеры.

Литература:

И.Р. Шафаревич, В.В. Никулин, Группы и геометрии Наука .!98?

Г.С.Кокстер,Введение в геометрию.Наука 196?