Лагранжева механика 9 (2016/2017)

В.А. Побережный

1 Теорема Нётер

В конце прошлой лекции мы заметили, что техника, использованная нами для получения закона сохранения импульса отвечающего циклической обобщённой координате наводит на мысль, что всякая симметрия системы должна порождать некоторый закон сохранения. Понимание этой идеи, придание ей формальной строгости и наконец, проведение доказательства являются целью и содержанием данной лекции. Для начала, зафиксируем нестрогую идейную формулировку от которой мы будем отталкиваться.
Предварительная формулировка: *Всякая непрерывная однопараметрическая симметрия задачи влечёт существование некоторого закона сохранения*

Формулировка хоть и заявлена как предварительная, но единственным неясным местом в ней является "симметрия задачи", все прочие понятия в ней довольно ясны.

1.1 Что такое непрерывная симметрия задачи

Этот вопрос является самым важным и центральным во всей конструкции, после его разрешения останется только провести прямые и несложные, пусть и довольно длинные вычисления. Для начала очевидно, что симметрия это какое-то преобразование, и раз уж оно называется симметрией, а не просто преобразованием, то оно должно что-то сохранять. Вспомним основы работы в лагранжевом формализме.

Пусть нам задана механическая или геометрическая система. Это в частности подразумевает, что определено конфигурационное пространство, или множество допустимых положений системы. Дальнейшие шаги:

1. Вводим обобщённые координаты на конфигурационном пространстве

2. Определяем лагранжиан

3. Ищем экстремали действия

Если задача происходит не из механики, то первый шаг зачастую отсутствует, например, при поиске геодезических, в задаче о брахистохроне итд. Что же здесь определено фундаментально, а что введено нами "руками" для удобства? Несложно видеть, что каноническими, "инвариантными" или "геометрическими" объектами здесь являются конфигурационное многообразие и действие, то есть отображение из кривых на этом многообразии в числа. А вот обобщённые координаты и лагранжиан суть просто инструменты вводимые нами для исследования этих объектов. Естественно предположить, что и действующая в задаче симметрия должна уважать именно канонические инвариантные объекты.

Первое приближение: *Будем называть симметрией такую гладкую деформацию (преобразование) обобщённых координат*

$$\begin{gathered} t \mapsto {}^s t \\ \mathbf{q} \mapsto {}^s\mathbf{q} \end{gathered}$$

при которой действие сохраняется.

$$\begin{gathered} L(\cdot,\cdot,\cdot) \mapsto L(\cdot,\cdot,\cdot) \\ S[\mathbf{q}(t)] = \int_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},\mathbf{t}) \equiv S[{}^s\mathbf{q}(t)] = \int_{{}^s t_0}^{{}^s t_1} L({}^s\mathbf{q},{}^s\dot{\mathbf{q}},{}^s t)d^s t \end{gathered}$$

Замечание 1 *Мы уже знаем, (Лекция 7, Предложение 1) что для инвариантности функции на орбите действия группы достаточно инфинитезимальной инвариантности. Поэтому условие сохранения действия можно переписать следующим образом:*

$$S[{}^s\mathbf{q}(t)] = S[\mathbf{q}(t)] + o(s)$$

этого будет достаточно.

Замечание 2 *В наборе переменных входящих в лагранжиан у нас имеется время – выделенная координата, не такая как прочие, лагранжиан от неё зависит особенным специальным образом. При преобразованиях группы Галилея время тоже выделено среди прочих координат – если пространственные переменные при переходе от одной инерциальной системы отсчёта к другой могут сдвигаться, поворачиваться, и равномерно прямолинейно смещаться, то времени разрешено только сдвигаться на константу. (Мы уже упоминали, что такая выделенность времени относительно прочих координат смягчается при переходе от классической механики к релятивистской) Опираясь на это наблюдение, мы в дальнейшем будем рассматривать только такие преобразования симметрии, при которых время не смешивается с прочими координатами, то есть, во всех точках пространства деформируется одинаково: ${}^s t = F(t,s)$, и F не зависит от $\mathbf{q}$. В инфинитезимальном описании получаем ${}^s t = t + \chi_0(t) + o(s)$. Более того, легко заметить, что генератор χ_0 постоянен и не зависит от t так как вся ось времени целиком является орбитой данного группового потока. Поэтому для всех рассматриваемых в дальнейшем преобразований симметрии мы полагаем ${}^s t = t + \chi_0 s + o(s)$. Более того перепараметризацией $\widetilde{s} = \chi_0 s$ можно привести любую симметрию в части времени к ${}^s t = t + s + o(s)$*

Пример: Свободная частица в $\mathbb{R}^2$, координаты декартовы, преобразование – поворот:

$$\begin{aligned} t \mapsto \quad & {}^s t = t \\ q_1 \mapsto \quad & {}^s q_1 = \cos s \cdot q_1 + \sin s \cdot q_2 \\ q_2 \mapsto \quad & {}^s q_2 = -\sin s \cdot q_1 + \cos s \cdot q_2 \end{aligned}$$

Лагранжиан $L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \frac{m}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)$. При деформации получаем $L({}^s\mathbf{q},{}^s\dot{\mathbf{q}}) = \frac{m}{2}({}^s\dot{q}_1^2 + {}^s\dot{q}_2^2) = \frac{m}{2}(\cos^2 s + \sin^2 s)(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) = L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$ Лагранжиан вообще не

изменился, значит и действие вообще не изменилось, данное преобразование действительно является симметрией.
Пример: Свободная частица в $\mathbb{R}^2$, координаты декартовы, преобразование – сдвиг времени:

$$\begin{aligned} t \mapsto & \quad {}^s t = t + s + o(s) \\ q_1 \mapsto & \quad {}^s q_1 = q_1(t+s) = q_1 + \dot{q}_1 s + o(s) \\ q_2 \mapsto & \quad {}^s q_2 = q_2(t+s) = q_2 + \dot{q}_2 s + o(s) \end{aligned}$$

Лагранжиан $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{m}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)$. Исходное действие:

$$S[\mathbf{q}(t)] = \int_{t_0}^{t_1} \frac{m}{2}(\dot{q}_1^2(t) + \dot{q}_2^2(t))dt$$

Деформация: $L({}^s\mathbf{q}, {}^s\dot{\mathbf{q}}) = \frac{m}{2}({}^s\dot{q}_1^2 + {}^s\dot{q}_2^2) = \frac{m}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + m(\dot{q}_1\ddot{q}_1 + \dot{q}_2\ddot{q}_2)s + o(s)$. Новое действие:

$$S[{}^s\mathbf{q}(t)] = \int_{t_0+s}^{t_1+s} \left[\frac{m}{2}\big(\dot{q}_1^2(t) + \dot{q}_2^2(t)\big) + m\big(\dot{q}_1(t)\ddot{q}_1(t) + \dot{q}_2(t)\ddot{q}_2(t)\big)s\right] d(t+s) + o(s)$$

Проверка того, что в данном примере $S[{}^s\mathbf{q}(t)] = S[\mathbf{q}(t)] + o(s)$ практически полностью пошагово повторяет вычисления для общего случая которые мы проводим ниже (Предложение 2). По этой причине мы их тут не дублируем, а оставляем в качестве упражнения (весьма полезного!) для читателя. Так вот, прямая проверка подтверждает, что действие сохраняется и данное преобразование также является симметрией.

Итак, уточнённый взгляд на симметрию:
Второе приближение: *Будем называть симметрией такую инфинитезимальную деформацию (преобразование) обобщённых координат*

$$\begin{aligned} t &\mapsto {}^s t = t + s + o(s) \\ q_i &\mapsto {}^s q_i = q_i + \chi_i(\mathbf{q}, t)s + 0(s) \end{aligned}$$

при которой действие сохраняется в первом порядке по s.

$$L(\cdot,\cdot,\cdot) \mapsto L(\cdot,\cdot,\cdot)$$
$$S[{}^s\mathbf{q}(t)] = \int_{{}^s t_0}^{{}^s t_1} L({}^s\mathbf{q}, {}^s\dot{\mathbf{q}}, {}^s t)d^s t = S[\mathbf{q}(t)] + o(s)$$

Итак, мы определились с понятием симметрии и можем приступать к поиску законов сохранения. В принципе, мы могли бы провести сейчас все вычисления в максимальной общности, но это довольно объёмный и не очень идейно интересный труд, по сути элементарное разложение в ряд. Вместо этого немного упростим себе задачу рассмотрев два понятных и осмысленных частных случая, и показав затем, что общая конструкция интеграла движения для симметрии общего вида из них легко восстанавливается. А именно посмотрим отдельно на симметрии времени и пространства и их законы сохранения.

1.2 Разделение симметрий

Предложение 1 (Симметрия по пространству) *Если при преобразовании*

$$\begin{aligned} t &\mapsto {}^s t \equiv t \\ q_i &\mapsto {}^s q_i = q_i + \chi_i(\mathbf{q}, t)s + 0(s) \end{aligned}$$

выполняется

$$L({}^s\mathbf{q}, {}^s\dot{\mathbf{q}}, t) = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + o(s)$$

то это симметрия.

Предложение 2 (Симметрия по времени) *Если лагранжиан L не зависит явно от t, то есть $L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, то преобразование*

$$\begin{aligned} &t \mapsto {}^s t = t + s + o(s) \\ &q_i \mapsto {}^s q_i \equiv q_i \end{aligned}$$

это симметрия.

Доказательство (Симметрия по пространству):

$$S[{}^s\mathbf{q}(t)] = \int_{t_0}^{t_1} L({}^s\mathbf{q}, {}^s\dot{\mathbf{q}}, t)dt = \int_{t_0}^{t_1} \left[L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + o(s)\right] dt =$$
$$= S[\mathbf{q}(t)] + \int_{t_0}^{t_1} o(s)dt = S[\mathbf{q}(t)] + o(s)$$

Доказательство (Симметрия по времени):

$$\begin{aligned} {}^s\mathbf{q}({}^s t) = {}^s\mathbf{q}(t+s) \equiv \mathbf{q}(t) \Rightarrow {}^s\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}(t-s) = \mathbf{q} - \dot{\mathbf{q}}(t)s + o(s) \\ {}^s\dot{\mathbf{q}}({}^s t) = {}^s\dot{\mathbf{q}}(t+s) \equiv \dot{\mathbf{q}}(t) \Rightarrow {}^s\dot{\mathbf{q}}(t) = \dot{\mathbf{q}}(t-s) = \dot{\mathbf{q}} - \ddot{\mathbf{q}}(t)s + o(s) \end{aligned}$$

Следовательно

$$L({}^s\mathbf{q}, {}^s\dot{\mathbf{q}}) = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}}s - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\ddot{\mathbf{q}}s + o(s) = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \frac{dL(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{dt}s + o(s)$$

Тогда

$$S[{}^s\mathbf{q}(t)] = \int_{t_0+s}^{t_1+s} L({}^s\mathbf{q}, {}^s\dot{\mathbf{q}}, t)dt =$$
$$\int_{t_0+s}^{t_1+s} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})dt - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\Big|_{t_1+s} s + L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\Big|_{t_0+s} s + o(s) =$$
$$= \int_{t_0+s}^{t_0} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})dt + S[\mathbf{q}(t)] + \int_{t_1}^{t_1+s} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})dt - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\Big|_{t_1+s} s + L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\Big|_{t_0+s} s + o(s)$$

и так как для дифференцируемых f выполняется

$$\int_0^s f(x)dx = f(0) \cdot s + o(s^2)$$

получаем

$$S[{}^s\mathbf{q}(t)] = S[\mathbf{q}(t)] + o(s)$$

2 Вычисления и доказательства

2.1 Первый интеграл симметрии по пространству

Теорема 1 *Если преобразование*

$$\begin{array}{rcl} t & \mapsto & {}^s t \equiv t \\ q_1 & \mapsto & {}^s q_1 = q_1 + \chi_1(\mathbf{q}, t)s + 0(s) \\ & \vdots & \\ q_n & \mapsto & {}^s q_n = q_n + \chi_n(\mathbf{q}, t)s + 0(s) \end{array}$$

сохраняет в первом порядке лагранжиан,

$$L({}^s\mathbf{q}, {}^s\dot{\mathbf{q}}, t) = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + o(s)$$

то система имеет первый интеграл вида

$$I = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \chi_i(\mathbf{q}, t) \right)$$

То есть, (напоминаем определение) если $\widehat{\mathbf{q}}(t)$ *экстремаль, то* $\frac{d}{dt} I\big(\widehat{\mathbf{q}}(t)\big) = 0$

Доказательство: С одной стороны, по Предложению 1 рассматриваемое преобразование это симметрия и выполняется $S[{}^s\mathbf{q}(t)] = S[\mathbf{q}(t)] + o(s)$. С другой стороны, прямое вычисление разложения действия в ряд по s даёт: (во всех местах где имеется индекс i по нему подразумевается суммирование, не написанное для экономии места)

$$S[{}^s\mathbf{q}(t)] = \int_{t_0}^{t_1} L({}^s\mathbf{q}, {}^s\dot{\mathbf{q}}, t) dt = \tag{1}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{q} + \chi(\mathbf{q})s + o(s), \dot{\mathbf{q}} + \dot{\chi}(\mathbf{q})s + o(s), t) dt = \tag{2}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left[L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \frac{\partial L}{\partial q_i} \chi_i s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{\chi}_i s + o(s) \right] dt = \tag{3}$$

$$= S[\mathbf{q}(t)] + \left[\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \chi_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{\chi}_i \right) dt \right] s + o(s) = \tag{4}$$

$$= S[\mathbf{q}(t)] + \left[\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \chi_i - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \chi_i \right) dt \right] s + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \chi_i \right) \Bigg|_{t_0}^{t_1} s + o(s) = \tag{5}$$

$$= S[\mathbf{q}(t)] + \left[\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) \chi_i dt \right] s + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \chi_i \right) \Bigg|_{t_0}^{t_1} s + o(s) \tag{6}$$

Таким образом, если $\widehat{\mathbf{q}}(t)$ - экстремаль исходной задачи, то

$$S[{}^s\widehat{\mathbf{q}}(t)] = S[\widehat{\mathbf{q}}(t)] + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \bigg|_{\widehat{\mathbf{q}}(t)} \cdot \chi_i \right) \Bigg|_{t_0}^{t_1} s + o(s)$$

И следовательно,

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \bigg|_{\widehat{\mathbf{q}}(t)} \cdot \chi_i \right) \Bigg|_{t_0}^{t_1} = 0$$

А так как t_1 не фиксировано и принимает любые значения, то

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \bigg|_{\widehat{\mathbf{q}}(t)} \cdot \chi_i(\mathbf{q}, t) \right) \Bigg|_{t} \equiv \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \bigg|_{\widehat{\mathbf{q}}(t)} \cdot \chi_i(\mathbf{q}, t) \right) \Bigg|_{t_0} = I = const$$

Получили закон сохранения – при эволюции системы величина I сохраняется.

2.2 Первый интеграл симметрии по времени

Теорема 2 *Если преобразование*

$$\begin{aligned} &t \mapsto {}^s t = t + s + o(s) \\ &q_i \mapsto {}^s q_i \equiv q_i \end{aligned}$$

является симметрией (лагранжиан не зависит явно от t), то система имеет первый интеграл вида

$$I = L - \dot{\mathbf{q}}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$$

Доказательство: Аналогично предыдущему случаю должно выполняться $S[{}^s\mathbf{q}(t)] = S[\mathbf{q}(t)] + o(s)$. Прямое вычисление даёт как мы уже видели

$$\begin{aligned} S[{}^s\mathbf{q}(t)] = \int_{t_0+s}^{t_1+s} L({}^s\mathbf{q}, {}^s\dot{\mathbf{q}}, t)dt = \int_{t_0+s}^{t_1+s} \left(L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}}s - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\ddot{\mathbf{q}}s \right) dt + o(s) = \\ = S[\mathbf{q}(t)] + \int_{t_0+s}^{t_0} (L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - X \cdot s)\, dt + \int_{t_1}^{t_1+s} (L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - X \cdot s)\, dt + \int_{t_0}^{t_1} (-X \cdot s)\, dt + o(s) = \\ \text{(обозначили через } X = \tfrac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} + \tfrac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\ddot{\mathbf{q}}\text{)} \\ = S[\mathbf{q}(t)] + \int_{t_0+s}^{t_0} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})dt + \int_{t_1}^{t_1+s} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})dt + \int_{t_0}^{t_1} (-X \cdot s)\, dt + o(s) = \\ \text{(оценка из Предложения 2)} \\ = S[\mathbf{q}(t)] - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\Big|_{t_0} \cdot s + L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\Big|_{t_1} \cdot s + \int_{t_0}^{t_1} (-X \cdot s)\, dt + o(s) = \\ \text{(по той же самой оценке)} \\ = S[\mathbf{q}(t)] + L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\Big|_{t_0}^{t_1} \cdot s + \int_{t_0}^{t_1} (-X \cdot s)\, dt + o(s) = \\ = S[\mathbf{q}(t)] + \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\big(L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\big)dt \cdot s + \int_{t_0}^{t_1} (-X \cdot s)\, dt + o(s) = \\ \text{(так как на экстремали } \tfrac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \tfrac{d}{dt}\left(\tfrac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)\text{, то } -X = -\tfrac{d}{dt}\left(\tfrac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)\dot{\mathbf{q}} - \left(\tfrac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)\tfrac{d}{dt}\dot{\mathbf{q}} = -\tfrac{d}{dt}\left[\tfrac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\dot{\mathbf{q}}\right]\text{)} \\ = S[\mathbf{q}(t)] + \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\left[L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\dot{\mathbf{q}}\right] dt \cdot s + o(s) \end{aligned}$$

Таким образом на экстремали

$$S[{}^s\widehat{\mathbf{q}}(t)] = S[\widehat{\mathbf{q}}(t)] + \left[\left(L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\dot{\mathbf{q}} \right)\Bigg|_{\widehat{\mathbf{q}}(t)} \right]\Bigg|_{t_0}^{t_1} s + o(s)$$

и значит,

$$\left(L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\dot{\mathbf{q}} \right)\Bigg|_{\widehat{\mathbf{q}}(t)} = I = const$$

2.3 Первый интеграл общей симметрии

Общий случай немедленно получается из комбинации двух разобранных:

Теорема 3 *Если под действием однопараметрической группы диффеоморфизмов*

$$\begin{array}{rcl} t \mapsto \ {}^s t & = & t + \chi_0 \cdot s + o(s) \\ q_1 \mapsto \ {}^s q_1 & = & q_1 + \chi_1(\mathbf{q}, t) \cdot s + o(s) \\ & \vdots & \\ q_n \mapsto \ {}^s q_n & = & q_n + \chi_n(\mathbf{q}, t) \cdot s + o(s) \end{array}$$

лагранжиан (не зависящий явно от t) сохраняется (в первом порядке по s)

$$L({}^s\mathbf{q}, {}^s\dot{\mathbf{q}}) = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + o(s)$$

то система имеет первый интеграл вида

$$I = \left(L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \Bigg|_{\widehat{\mathbf{q}}(t)} \chi_0 + \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \chi_i \right) \Bigg|_{\widehat{\mathbf{q}}(t)} = const$$

где $\widehat{\mathbf{q}}(t)$ экстремаль системы.

Доказывается элементарно – все места в разложении в ряд в которых учитываются обе составляющие симметрии, и пространственная и временная очевидно дают вклады выше первого порядка по s сразу следует из явного вида.

2.4 Обобщение

Полученный результат можно ещё немного усилить без всяких затрат и вычислений. Когда мы определяли понятие симметрии мы просили чтобы действие не изменялось. Вообще говоря требование избыточно сильное, ведь для описания движения системы важны только экстремали действия, а не весь функционал полностью. Поэтому можно изменить требование к симметрии попросив, чтобы она сохраняло не всё действие целиком, а хотя бы его экстремали. Например, очевидно, что если $S[{}^s\mathbf{q}(t)] = S[\mathbf{q}(t)] + 10s + o(s)$, то экстремали сохраняются, минимумы конечно же переходят в минимумы. Следующий шаг - очевидно помимо констант можно разрешить любые функции зависящие только от s, то есть если $S[{}^s\mathbf{q}(t)] = S[\mathbf{q}(t)] + F(s)s + o(s)$ и $\widehat{\mathbf{q}}(t)$ экстремаль исходного действия, то ${}^s\mathbf{q}(t)$ очевидно будет экстремалью возмущённого действия. Как это описывается через лагранжиан? Ну достаточное условие написать очень просто, если

$$L({}^s\mathbf{q}, {}^s\dot{\mathbf{q}}) = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \frac{dF(\mathbf{q}, t)}{dt} \cdot s + o(s)$$

то так как мы рассматриваем задачу с закреплёнными концами, то есть $\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0$) и $\mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}_1$) фиксированны, а действие это интеграл от лагранжиана, то очевидно

$$S[{}^s\mathbf{q}(t)] = [\mathbf{q}(t)] + [F(\mathbf{q}_1, t_1) - F(\mathbf{q}_0, t_0)]\, s + o(s)$$

и экстремали сохраняются. Соответствующая поправка в общий вид закона сохранения вносится элементарно, без всяких вычислений:

Теорема 4 *Если при преобразовании вида*

$$\begin{array}{rcl} t \mapsto {}^s t & = & t + \chi_0 \cdot s + o(s) \\ q_1 \mapsto {}^s q_1 & = & q_1 + \chi_1(\mathbf{q}, t) \cdot s + o(s) \\ & \vdots & \\ q_n \mapsto {}^s q_n & = & q_n + \chi_n(\mathbf{q}, t) \cdot s + o(s) \end{array}$$

лагранжиан изменяется как

$$L({}^s\mathbf{q}, {}^s\dot{\mathbf{q}}) = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \frac{dF(\mathbf{q}, t)}{dt} \cdot s + o(s)$$

то система имеет первый интеграл вида

$$I = \left(L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \chi_0 + \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \chi_i \right) - F(\mathbf{q}, t) = const$$

Стандартным примером преобразования такого вида является равномерное прямолинейное движение.