14. Деревья

Граф называется *деревом*, если он связен и не содержит непересекающихся циклов. *Остовом графа* называется любой его подграф, являющийся деревом и содержащий все вершины графа

14.1. а) В любом дереве найдется *лист*, т.е. вершина степени 1.

б) Связный граф с n вершинами является деревом тогда и только тогда, когда в нем $n-1$ ребро.

в) Граф является деревом тогда и только тогда, когда между любыми двумя его вершинами существует единственный несамопересекающийся путь.

г) Последовательность из n натуральных чисел является последовательностью степеней вершин некоторого дерева тогда и только тогда, когда сумма ее членов равна $2n-2$.

Далее будем рассматривать графы с занумерованными вершинами (т.е. графы, а не их классы изоморфизма).

14.2. Каких графов с данными n вершинами больше:

а) имеющих изолированную вершину или не имеющих?

б) связных или несвязных?

14.3 (Формула Кэли). а) Число деревьев с данными n вершинами равно n^{n-2}.

б) Пусть $d_1+\dots+d_n=2n-2$. Докажите, что число деревьев с n вершинами, у которых степень i-й вершины равна d_i, равно $\frac{(n-2)!}{(d_1-1)!\dots(d_n-1)!}$.

Это утверждение можно переформулировать так:

$$(x_1+\dots+x_n)^{n-2}=\sum_T x_1^{\deg_T(1)-1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\deg_T(n)-1},$$

где сумма берется по всем деревьям T с n вершинами, а через $\deg_T(i)$ обозначена степень i-й вершины в дереве T.

14.4. а) Докажите, что дереве нет непустых подграфов, у которых степень каждой вершины четная и положительная.

б) Для графа G обозначим через $h_1(G)$ число его подграфов без изолированных вершин, у которых степень каждой вершины четна. (Пустой подграф удовлетворяет этому условию). Докажите, что $h_1(G)$ — степень двойки. Выразите $h_1(G)$ через количество вершин v, ребер e и компонент связности k графа.

в) На ребрах дерева стоят знаки $+$ и $-$. Разрешается менять знаки на всех ребрах, выходящих из одной вершины. Тогда из любой расстановки можно получить любую другую.

г) Докажите, что в предыдущем пункте достаточно уметь менять знаки только в вершинах, в которые входят лишь ребра с одним знаком.

д) Назовем две расстановки знаков $+$ и $-$ на ребрах графа эквивалентными, если одна получается из другой преобразованиями из пункта **в)**. Обозначим через $h^1(G)$ число классов эквивалентности расстановок знаков. Докажите, что оно является степенью двойки, и выразите его через v, e и k.

е*) Докажите, что $h_1(G)$ и $h^1(G)$ не меняются при стягивании ребра, и выведите отсюда, что $h_1(G)=h^1(G)$.