

12. Графы под шубой

- 12.1. а)** Некоторые пары (из конечного числа) городов соединены (беспересадочными) авиалиниями. Обязательно ли найдутся два города, из которых можно перелететь (за один раз) в одинаковое число городов?
- б)** Агент иностранной разведки сообщил, что каждая из 27 стран Евросоюза заключила договор ровно с 3 другими. Можно ли ему доверять?
- в)** В некотором царстве имеются столица, город Дальний и несколько других городов. Некоторые пары городов соединены дорогами (дороги могут пересекаться). Из столицы выходит 21 дорога, из города Дальнего одна дорога, а из остальных городов по 20 дорог. Обязательно ли из столицы можно проехать в Дальний (возможно, с пересадками)?
- 12.2.** Выпуклый многоугольник (отличный от треугольника) разбит на треугольники несколькими диагоналями, не пересекающимися нигде, кроме вершин. Обязательно ли найдутся хотя бы два треугольника разбиения, примыкающие к сторонам многоугольника двумя сторонами?
- 12.3.** В группе из нескольких человек некоторые люди знакомы друг с другом, а некоторые — нет. Каждый вечер один из них устраивает ужин для всех своих знакомых и знакомит их друг с другом. После того как каждый человек устроил хотя бы один ужин, оказалось, что какие-то два человека всё ещё не знакомы. Докажите, что на следующем ужине им познакомиться тоже не удастся.
- 12.4. а)** В Думе 450 депутатов, каждый из которых ударил одного из других. Докажите, что среди них можно выбрать 150 депутатов, среди которых никто никого не бил.
- б)** В бесконечном множестве гангстеров каждый охотится ровно за одним другим. Докажите, что найдётся бесконечное подмножество гангстеров, в котором никто ни за кем не охотится.
- в)** На выборах в городскую Думу каждый избиратель, если он приходит на выборы, голосует за себя (если он является кандидатом) и за всех тех кандидатов, которые являются его друзьями (список кандидатов и их друзей зафиксирован). Прогноз социологической службы мэрии считается *хорошим*, если в нем правильно предсказано количество голосов, поданных хотя бы за одного из кандидатов, и *нехорошим* в противном случае. Докажите, что при любом прогнозе избиратели могут так явиться на выборы, что этот прогноз окажется *нехорошим*.
- 12.5.** В некотором обществе любые два знакомых не имеют общих знакомых, а любые два незнакомых имеют ровно двух общих знакомых. Докажите, что в этом обществе все имеют одинаковое число знакомых.
- 12.6. а)** В городе нет ни мостов, ни туннелей, ни тупиков. Все перекрёстки имеют крестообразную форму и образованы пересечением ровно двух улиц. Совершая инспекционную поездку по городу, губернатор на каждом перекрёстке поворачивал либо направо, либо налево. Через некоторое время шофёр губернатора заметил, что они едут по дороге, по которой уже проезжали. Докажите, что они едут в ту же сторону, что и в первый раз.
- б*)** Два альпиниста стоят на уровне моря на противоположных сторонах горного хребта (плоской ломаной с конечным числом звеньев), расположенного целиком над уровнем моря. Докажите, что они смогут встретиться, оставаясь в процессе движения всё время на одной высоте над уровнем моря.