13. Подсчёты в графах

13.1. Назовём человека малообщительным, если у него менее 10 знакомых. Назовём человека чудаком, если все его знакомые малообщительны. Докажите, что количество чудаков не больше количества малообщительных.

13.2. На вечеринку пришли 10 человек. Затем те, у кого не было знакомых среди пришедших, ушли. Затем те, у кого был ровно один знакомый среди оставшихся, тоже ушли. Затем аналогично поступали те, у кого было ровно $2, 3, 4, \ldots, 9$ знакомых среди оставшихся к моменту их ухода. Какое наибольшее число людей могло остаться в конце?

13.3. В каждой из трёх школ учится по n человек. Любой ученик имеет в сумме ровно $n+1$ знакомых учеников из двух других школ. Докажите, что можно выбрать по одному ученику из каждой школы так, чтобы все трое выбранных учеников были знакомы друг с другом.

13.4. Некоторые пары (из конечного числа) городов соединены (беспересадочными) авиалиниями. Города, соединённые авиалинией, называются *смежными.* Может ли в этой стране быть ровно 100 авиалиний, если для любых двух смежных городов есть ровно

а) один город, смежный с ними обоими;

б) два города, смежные с ними обоими.

13.5. На предприятии трудятся 50 000 человек. Для каждого из них сумма количества его непосредственных начальников и его непосредственных подчинённых равна 7. В понедельник каждый работник предприятия издаёт приказ и выдаёт копию этого приказа каждому своему непосредственному подчинённому (если такие есть). Далее, каждый день работник берёт все полученные им в предыдущие дни приказы и либо раздаёт их копии всем своим непосредственным подчинённым, либо, если таковых у него нет, выполняет приказы сам. Оказалось, что в пятницу никакие бумаги по предприятию не передаются. Докажите, что на предприятии не менее 97 начальников, над которыми нет начальников.

13.6. Все рёбра связного графа раскрашены в два цвета. Из каждой вершины выходит поровну рёбер обоих цветов. Докажите, что из любой вершины до любой другой можно добраться, каждый раз меняя цвет ребра.

13.7. Дан двусвязный граф, т. е. связный граф, который при удалении любого своего ребра остаётся связным. Двое игроков по очереди ставят стрелки на рёбрах. Проигрывает игрок, после хода которого от какой-то вершины нельзя добраться до какой-нибудь другой, двигаясь только вдоль стрелок и по рёбрам без стрелок. Докажите, что при правильной игре обоих соперников партия закончится вничью.

13.8. Город состоит из нескольких площадей, соединённых непересекающимися дорогами. Площади — круги (а не точки), дороги — прямолинейные отрезки. Известно, что существует замкнутый маршрут, проходящий по каждой дороге ровно один раз (этот маршрут может проходить по площадям несколько раз). Докажите, что существует *несамопересекающийся* маршрут, проходящий по каждой дороге ровно один раз.

(Иными словами, в любом нарисованном на плоскости без самопересечений *эйлеровом* графе существует *эйлеров цикл*, аппроксимируемый несамопересекающимися циклами.)