ЛИСТОК 3

Задача 1. Докажите, что в каждой компоненте связности графа количество вершин нечетной степени четно.

Задача 2. Пусть γ — путь (не обязательно простой) в графе, соединяющий вершины A и B. Докажите, что в том же графе существует простой путь, соединяющий A и B и проходящий только по тем ребрам, по которым путь γ прошел нечетное число раз.

Задача 3. Связный граф называется эйлеровым, если в нем существует замкнутый путь, проходящий по каждому ребру ровно один раз. а) Докажите, что степень каждой вершины в эйлеровом графе четна. б) Пусть G — эйлеров граф. Докажите, что в нем существует простой цикл, при удалении которого G остается эйлеровым (в частности, связным) или становится пустым. в) Докажите, что всякий связный граф, в котором степени всех вершин четны, является эйлеровым.

Указание (к пункту 3б)**.** Удалить простой цикл значит убрать все входящие в него ребра. Если при этом образуются изолированные вершины (в которые не входит ни одного ребра), то их тоже нужно удалить.

Задача 4. а) Докажите, что в каждой компании из 6 человек имеются либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых. б) Верно ли, что существует число N такое, что в каждой компании из N человек имеются либо четверо попарно знакомых, либо четверо попарно незнакомых? Если да, то укажите как можно меньшее значение N.

Задача 5. Докажите, что в каждом связном графе имеется подграф, включающий все вершины и являющийся деревом.

Задача 6. Докажите, что во всяком дереве с $n > 1$ вершинами имеется по крайней мере две вершины степени 1 ("висячие").

Задача 7. Пусть G — граф, в котором v_0 вершин, v_1 ребер и h_0 компонент связности. а) Докажите, что имеет место неравенство $v_1 \geq v_0 - h_0$, причем равенство достигается в том и только том случае, когда каждая компонента связности графа — дерево. б) Пусть F_G — векторное пространство над полем $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, элементами которого являются функции $f : V_1 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (где V_1 — множество ребер графа G), удовлетворяющих следующему условию: если ребра $e_1, \ldots, e_k \in V_1$ образуют цикл, то $f(e_1) + \cdots + f(e_k) = 0$. Докажите, что $\dim F_G = v_0 - h_0$.

Задача 8. Пусть G — граф, каждая вершина которого имеет степень не меньше k, где $k \geq 2$. Докажите, что в G имеется простой цикл из не менее чем $k + 1$ ребер.

Задача 9. Пусть T — дерево, вершины которого занумерованы от 1 до n, а ребра — от 1 до $(n-1)$. Обозначим a_i, b_i концы i-го ребра ($i = 1, \ldots, n-1$). Докажите, что произведение транспозиций $(a_1b_1)(a_2b_2)\ldots(a_{n-1}b_{n-1})$ (в группе перестановок S_n) — циклическая перестановка.

Указание. Докажите индукцией по $k = 1, \ldots, n-1$, что произведение транспозиций $(a_1b_1)(a_2b_2)\ldots(a_kb_k)$ — перестановка (элемент S_n), раскладывающаяся в произведение $n - k$ непересекающихся циклов.

Задача 10. Пусть T — дерево, вершины которого занумерованы от 1 до n. Определим числовую последовательность $b(T) = (b_1, \ldots, b_{n-2})$ по индукции следующим образом. Пусть a — самый большой номер "висячей" вершины дерева; тогда b_1 — номер ее "родителя" (единственной вершины, которая соединена с a ребром). Удалим теперь из дерева T вершину a вместе с ребром ab_1; полученное дерево обозначим T'. Тогда по определению $b(T') = (b_2, \ldots, b_{n-1})$ (индукция!). Последовательность $b(T)$ называется кодом Прюфера дерева T. а) Докажите, что код Прюфера полностью определяет дерево: если $b(T_1) = b(T_2)$, то $T_1 = T_2$ (как деревья с нумерованными вершинами). б) Докажите, что любая последовательность $b_1, \ldots, b_{n-2}$, где все $b_i \in \{1, \ldots, n\}$, является кодом Прюфера некоторого дерева с n вершинами. Найдите общее количество деревьев с n вершинами, занумерованными $1, \ldots, n$.

Задача 11. Родословная книга семьи выглядит примерно так: "Основатель рода, a_1, имел троих детей. Старший из детей (назовем его b_1) имел двоих детей; средний (назовем его b_2), детей не имел, а младший (назовем его b_3) имел одного ребенка. Старший из детей b_1 (назовем его c_1) имел столько-то детей ..." и т.д. а) Перечислите все возможные родословные книги семьи, состоявшей из $n = 3, 4, 5$ человек (во всех поколениях). б) Сколько существует возможных родословных книг для семьи из n человек при произвольном n? В обоих пунктах предполагается, что дети каждого из членов семьи упорядочены по старшинству, т.е. близнецов не было. Основатель рода всегда один.

Указание. Ответ при $n = 3$: возможны две родословные книги. Первая: основатель рода имел двоих детей, которые детей не имели. Вторая: основатель рода имел одного ребенка, у которого был один ребенок, который детей не имел.