Операды в алгебре и топологии

Алексей Горинов (gorinov@mccme.ru, agorinov@hse.ru), Антон Хорошкин (akhoroshkin.hse@gmail.com)

Понятие операды было введено топологами в 60-ые года 20 века для изучения пространства петель. Но скоро стало ясно, что много примеров приходит из алгебры. Например, рассмотрев алгебру определённого типа, то есть множество с заданными операциями на нём и забыв про конкретное множество, можно описать операции с заданными правилами последовательного применения. Данная структура и будет операдой.

В конце 20-го и начале 21-го веков многие вопросы алгебры, топологии и математической физики были переложены на язык операд, что позволило сильно продвинуться в их понимании. Однако, операды и их обобщения остаются до сих пор весьма сложным по своей комбинаторике объектом изучения.

Первое применение в топологии операды получили как удобный способ формализовать понятие "набора согласованных гомотопий": Известно, что умножение в пространстве петель ассоциативно не в буквальном смысле, а только с точностью до гомотопии. Для топологического пространства X отображения

$$\begin{matrix} (\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)\mapsto(\gamma_1\cdot\gamma_2)\cdot\gamma_3 \\ (\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)\mapsto\gamma_1\cdot(\gamma_2\cdot\gamma_3) \end{matrix} : \Omega(X)\times\Omega(X)\times\Omega(X)\to\Omega(X)$$

не равны, а только гомотопны. Аналогичных отображений из $(\Omega X)^4$ в ΩX уже имеется 5 штук; они соответствуют расстановкам скобок в произведении 4 сомножителей. Между любыми двумя такими отображениями есть гомотопия, которая получается перегруппировкой скобок, но таких гомотопий всегда не одна. Полученные гомотопии в свою очередь оказываются гомотопны. Обобщение подобного явления на произвольное число сомножителей ведет к понятию операды ассоциаэдров, с помощью которого можно охарактеризовывать пространства, которые гомотопически эквивалентны пространствам петель.

Цель семинара в том, чтобы обсудить определение, основные свойства, примеры и приложения операд.

Примерный список тем, которые предполагается обсудить :

- Определения, примеры и основные свойства операд. Алгебры над операдами.
- Топологические операды. Распознавание (кратных) пространств петель.
- Многогранники Сташеффа и ∞-структуры. Умножения Масси в когомологиях. Моделирование рационального гомотопического типа.
- Резольвенты, формулы для гомотопического трансфера.
- Операды заданные образующими и соотношениями, кошулевость.
- Операды, пространства конфигураций и пространства модулей кривых.
- Модельные категории (обзор). Машинерия Хинича: модельная структура на категориях операд, алгебр над данной операдой и модулей над данной алгеброй над данной операдой в характеристике 0.

Пререквизиты:

- топология в объеме первых трех глав Хатчера;
- владение линейной алгеброй;
- минимальное знакомство с представлениями симметрической группы (необходимое для понимания двойственности Шура-Вейля);
- минимальное знакомство с гомологической алгеброй (комплексы, резольвенты, гомологии)