Курс: Накрытия и теория Галуа

Семестр: Весна

Лектор: Петр Дунин-Барковский

Введение: Курс посвящен введению в теорию накрытий римановых поверхностей и описанию удивительной аналогии между классификацией накрытий и основной теоремой алгебраической теории Галуа. Будут рассмотрены как неразветвленные, так и разветвленные накрытия. Замечательным фактом является то, что, как алгебраические результаты теории Галуа позволяют лучше понять геометрию накрытий, так и наоборот, геометрические соображения позволяют получить алгебраические результаты. В частности, в курсе будет освещено, как геометрическим способом получить полное описание всех конечных алгебраических расширений поля рациональных функций одной переменной.

Необходимые предварительные сведения: Начальный курс абстрактной алгебры: линейная алгебра, группы, кольца, идеалы. Начальные курсы топологии и геометрии: топологические пространства, поверхности, фундаментальные группы. Начальный курс ТФКП.
Желательно, но не обязательно, посещение осеннего курса В.А. Вологодского «Введение в теорию Галуа».

Содержание:

- Базовые факты алгебраической теории Галуа.
- Накрытия топологических пространств. Классификация накрытий с отмеченными точками (через фундаментальные группы).
- Римановы поверхности/алгебраические кривые. Теорема существования Римана (без доказательства).
- Накрытия и разветвленные накрытия римановых поверхностей.
- Аналогия классификации промежуточных поднакрытий данного нормального накрытия и классификации промежуточных подполей данного расширения Галуа.
- Поля мероморфных функций на римановых поверхностях и их алгебраические расширения, поля ростков.
- Риманова поверхность алгебраического уравнения над полем мероморфных функций.
- Применение теории Галуа к полям ростков на римановых поверхностях.
- Геометрическое описание всех конечных алгебраических расширений поля рациональных функций одной переменной.

Литература:

- Хованский, А. Г. «Теория Галуа, накрытия и римановы поверхности.» М: URSS, 2007. Главы 2, 3.
- Хованский, А. Г. «Топологическая теория Галуа. Разрешимость и неразрешимость уравнений в конечном виде.» М: Изд-во МЦНМО, 2008. Глава 4.

Course: Coverings and Galois theory

Semester: Spring

Instructor: Petr Dunin-Barkowski

Course description: This course is an introduction to the theory of coverings of Riemann surfaces and to the surprising analogy between the classification of coverings and the main theorem of the Galois theory. We will consider both unramified and ramified coverings. It is remarkable that the connection between the theory of coverings and the algebraic Galois theory works in both ways: Galois theory allows us to understand the geometry of coverings better, and, at the same time geometric considerations lead to some purely algebraic results. In particular, we will see how to obtain the complete classification of all finite algebraic extensions of the field of rational functions of a single variable geometrically in a natural way.

Prerequisites: Basic abstract algebra: linear algebra, groups, rings, ideals. Basic topology and geometry: topological spaces, surfaces, fundamental groups. Basic complex analysis.
Attending the fall 2017/2018 course “Introduction to Galois theory” by Vadim Vologodsky would be nice, though not required.

Curriculum:

- Basic facts from algebraic Galois theory.
- Coverings of topological spaces. Classification of coverings with marked points (through fundamental groups).
- Riemann surfaces/algebraic curves. Riemann's existence theorem (without proof).
- Coverings and ramified coverings of Riemann surfaces.
- Analogy between the classification of intermediate subcoverings of a given normal covering and the classification of subfields of a given Galois extension.
- Fields of meromorphic functions on Riemann surfaces and their algebraic extensions, fields of germs.
- Riemann surface of an algebraic equation over the field of meromorphic functions.
- Application of Galois theory to the fields of germs on Riemann surfaces.
- Geometric description of all finite algebraic extensions of the field of rational functions of a single variable.

Textbooks:

- Khovanskii, Askold. *Galois theory, coverings, and Riemann surfaces.* Springer, 2013. Chapters 2, 3.
- Khovanskii, Askold. *Topological Galois Theory.* Springer, 2013. Chapter 4.