Листок 1

(годен до 29 сентября 2017 включительно)

Все рассматриваемые линейные пространства конечномерны над полем. V' – это пространство, двойственное пространству V.

1. Рассмотрим множество всех тех векторов из $\mathbb{R}^3$, каждая координата которых равна 0 или 1. Сколько различных базисов содержит это множество?

2. Доказать, что для трех подпространств A, B, C векторного пространства выполняется равенство $(A+B)\cap(B+C)\cap(C+A)=(A+C)\cap B+(A+B)\cap C$.

3. Доказать, что в условиях предыдущей задачи $(A\cap B)+(B\cap C)+(C\cap A)\subseteq(A+B)\cap(B+C)\cap(C+A)$, и разность размерностей подпространств в левой и правой частях этого включения четна.

4. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – базис вещественного векторного пространства V, $e_{n+1}=-e_1-e_2-\ldots-e_n$. Доказать, что любой вектор из V можно однозначно представить в виде $a_1e_1+\ldots+a_ne_n+a_{n+1}e_{n+1}$, $a_1+a_2+\ldots+a_{n+1}=0$.

5. Доказать, что в условиях предыдущей задачи любое семейство векторов $e_1,\ldots,e_{i-1},e_{i+1},\ldots,e_{n+1}$ является базисом и что координаты любого вектора в одном из этих базисов неотрицательны.

6. Обосновать правило блочного умножения матриц.

7. Пусть W – подпространство векторного пространства V. Построить канонический изоморфизм векторных пространств $(V/W)'$ и $\mathrm{Ann}W$.

8. Пусть заданы линейные отображения векторных пространств: $A\colon V_1\to V_3$, $B\colon V_1\to V_2$. Когда существует такое линейное отображение: $X\colon V_2\to V_3$, что $A=XB$?

9. Пусть заданы линейные отображения векторных пространств: $A\colon V_1\to V_3$, $B\colon V_2\to V_3$. Когда существует такое линейное отображение: $X\colon V_1\to V_2$, что$A=BX$?

10. Доказать,что ранг $m\times n$ матрицы A тогда и только тогда равен k, когда существуют такие $m\times k$ матрица B и $k\times n$ матрица C, $\mathrm{rk}B=\mathrm{rk}C=k$, что $A=BC$. Получить описание матриц ранга 1.