Лекция 1. Введение в наивную теорию множеств

1 Структура курса и система оценок

2 Кодекс чести

3 Наивное определение множества

Определение 1 *Множество - это любая совокупность элементов.*

Элементами могут быть точки на плоскости, функции, люди, города, галактитки. Независимо от природы, элемент множества мыслится как точка. Множества изображаются плоскими областями. Свойства операций над множествами иллюстрируются картинками на плоскости.

4 Счетные множества. Часть меньше целого?

Определение 2 *Отображение одного множества на другое - это соответствие, которое каждому элементу первого множества сопоставляет ровно один элемент второго множества.*

Обозначение. $f : A \to B,\ a \mapsto b = f(a)$.

Определение 3 *Отображение f взаимно однозначно (или, f-биекция), если каждый элемент множества B соответствует одному и только одному элементу множества A.*

Иллюстрация с яблоками. A - толпа женщин, B - толпа мужчин. Каждая женщина бросает мужчине ровно одно яблоко. Полученное отображение - биекция, если *каждый* мужчина получил *ровно одно* яблоко.

Определение 4 *Множество называется счетным, если существует его биекция на натуральный ряд $\mathbb{N}$.*

Предложение 1 *Множество всех целых чисел счетно.*

Доказательство Отображение $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ 2n \mapsto n,\ 2n-1 \mapsto 1-n$ является биекцией. $\square$

Предложение 2 *Множество всех рациональных чисел счетно.*

Задача 1 *Докажите!*

5 Диагональная процедура Кантора; существование несчетных множеств.

Теорема 1 *Множество всех подмножеств счетного множества несчетно.*

Определение 5 *(не общепринятое) Назовем* списком *(подмножеств множества $\mathbb{N}$) любое отображение $\mathbb{N}$ в множество всех подмножеств множества $\mathbb{N}$: $n \mapsto A_n \subset \mathbb{N}$.*

Лемма 1 *Для любого списка существует подмножество множества $\mathbb{N}$, которое в этот список не входит.*

Лемма 1 показывает, что никакой список не содержит всех подмножеств множества $\mathbb{N}$. Значит, соответствующее отображение не является биекцией. Теорема 1, по модулю леммы 1, доказана.

6 Доказательство леммы 1.

Доказательство Фиксируем и рассмотрим произвольный список. Элемент $n \in \mathbb{N}$ назовем *свободным*, если он не входит в соответствующее ему подмножество:

$$n \textit{ свободно } \Leftrightarrow n \notin A_n.$$

Пусть B - множество всех свободных элементов. Докажем, что оно не входит в список. Предположим противное. Пусть $B = A_n$ для некоторого n. Докажем, что элемент n не может быть ни свободным, ни несвободным, и получим противоречие.

Пусть элемент n свободный. Тогда он входит в $B = A_n$, значит n - несвободный - противоречие.

Пусть элемент n несвободный. Тогда он входит в A_n. Но $A_n = B$, и несвободных элементов не содержит; противоречие.

Это рассуждение работает и в случае, когда B пусто. Докажем, что пустое множество B не входит в список. Предположим противное. Пусть n соответствует B : $B = f(n)$. Поскольку B пусто, элемент n в него не входит. Значит, он свободный и должен входить в B. Но B пусто - противоречие. □

Доказательство Второе доказательство. Снова рассмотрим список, и в каждом подмножестве расположим элементы по возрастанию, пользуясь тем, что это - натуральные числа. Возьмем множество $B = \{b_1, \dots, b_n, \dots\}$ так, что b_n больше n-го элемента множества A_n, и больше всех предыдущих элементов $b_1, \dots, b_{n-1}$. Тогда множество B не входит в список. Действительно, $B \neq A_n$ для любого n, так как у этих множеств разные n-е элементы. □

Множество всех подмножеств натурального ряда Кантор назвал континуумом по причине, которая разъяснится позже.

7 Что дальше?

Так же, как и выше, можно доказать что не существует биекции континуума на множество всех его подмножеств.

Этот процесс можно продолжить неограниченно. Получится башня растущих множеств.

Рассмотрим множество всех множеств. Оно в определнном смысле является наибольшим. Но множество всех его подмножеств еще больше. Получается парадокс.

Он показывает, что наивная теория множеств не может существовать без фундамента из аксиом. В частности, “множество всех множеств” - просто несуществующий объект. Аксиоматическое построение тоерии множеств рассказывается в курсе логики.