Дифференциальные уравнения (осень, 2017)
Краткий конспект лекций
С.В. Шапошников

1. Примеры и определения.

(I) Простейшее (но очень важное) уравнение $x' = 0$ на некотором интервале (α, β). По теореме Лагранжа $x(t) - x(s) = x'(c)(t-s) = 0$ и, следовательно,

$$x(t) \equiv const.$$

(II) Почему атомные бомбы взрываются, а атомные электростанции нет?

Рассмотрим сделанный из некоторого вещества шар радиуса r. Пусть $N(t)$ – число нейтронов в данном веществе. Предположим, что нейтроны распределены равномерно по объему шара и скорость рождения новых нейтронов пропорциональна их количеству. Таким образом, за малый промежуток времени Δt произойдет рождение нейтронов в количестве $\alpha N(t)\Delta t$. За это же время Δt произойдет потеря нейтронов за счет их выхода за пределы шара. Количество улетевших нейтронов пропорционально числу нейтронов в сферическом слое $r - v\Delta t < |x| < r$, где v — скорость нейтронов. Таким образом улетает

$$\gamma(1 - (1 - r^{-1}v\Delta t)^3)N(t)$$

нейтронов. Тогда

$$N(t + \Delta t) - N(t) = \alpha \Delta t N(t) - \gamma(1 - (1 - r^{-1}v\Delta t)^3)N(t).$$

Делим на Δt и устремляем Δt к нулю. Получаем уравнение, описывающее радиоактивный распад

$$N' = \lambda N, \quad \lambda = (\alpha - \beta/r),$$

где α и β – положительные числа, зависящие от свойств вещества. Найдем функцию N. Умножая уравнение на $e^{-\lambda t}$ и перенося все в одну сторону приходим к равенству:

$$(Ne^{-\lambda t})' = 0,$$

из которого находим, что $N(t)e^{\lambda t} = const$ или

$$N(t) = N(0)e^{\lambda t}.$$

Если $\lambda = 0$, то число нейтронов не меняется. Если $\lambda < 0$, то число нейтронов очень быстро убывает и реакция затухает. Если $\lambda > 0$, то число нейтронов очень быстро возрастает. Этот случай соответствует взрыву. Значение r, при котором $\lambda = 0$, называется критическим.

Рассмотрим теперь несколько иную ситуацию. Пусть имеется дополнительный источник нейтронов, т. е. уравнение имеет вид $N' = \lambda N + n$, где n – некоторое число.

Предположим, что $\lambda \neq 0$. Тогда проделывая прежние преобразования, приходим к уравнению $(Ne^{-\lambda t} + \frac{n}{\lambda}e^{-\lambda t})' = 0$ и, следовательно,

$$N(t) = N(0)e^{\lambda t} + \frac{n}{\lambda}(e^{\lambda t} - 1).$$

Если $\lambda < 0$ и близко к нулю, то при достаточно большом t имеем $N(t) \approx -n/\lambda$. Таким образом, можно при небольшом n получить большие значения N и избежать взрыва.

(III) Остывание чайника.

Известно, что скорость остывания тела пропорциональна разности температуры этого тела и температуры внешней среды. Следовательно, для температуры получаем уравнение

$$T' = k(T_{out} - T).$$

Найдем его решение: $T(t) = (T(0) - T_{out})e^{-kt} + T_{out}$. Получается, что чайник никогда не остынет. По этой же причине корабль не может причалить без удара о причал (на причале даже специально автомобильные камеры висят). Если бы капитан менял скорость пропорционально расстоянию до причала, то корабль причаливал бы бесконечно долго.

Одномерное линейное уравнение

Обобщая предыдущие примеры, решим уравнение вида $y' = a(x)y + b(x)$.

Разделяя переменные, решаем *однородное* уравнение $y' = a(x)y$:

$$y = C\exp\Big(\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds\Big).$$

Вариация постоянной: будем искать общее решение в виде

$$y(x) = C(x)\exp\Big(\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds\Big).$$

Получаем уравнение на функцию $C(x)$

$$C'(x) = b(x)\exp\Big(-\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds\Big),$$

интегрируя которое находим общее решение исходного уравнения.

Рассмотрим случай, когда коэффициенты a и b – периодические функции с периодом $T > 0$. Пусть в начале $b = 0$. Тогда всякое решение имеет вид

$$y(x) = y(0)\exp\left(\int_0^x a(t)\,dt\right).$$

Отображение $M\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, заданное формулой $M(y(0)) = y(T)$, называется *оператором монодромии.* Замечательным образом оказывается, что это линейное отображение $My = \lambda y$, где

$$\lambda = \exp\left(\int_0^T a(t)\,dt\right).$$

С помощью оператора монодромии можно описать многие свойства решений. Например, решение $y(x)$ периодическое тогда и только тогда, когда $M(y(0)) = y(0)$. Последнее равенство означает, что $y(0) = y(T)$. В этом случае функции $y(x)$ и $y(x+T)$ решают линейное уравнение $y' = ay$ с одним начальным условием $y(0)$, а такое решение единственно и $y(x) \equiv y(x+T)$. Следовательно, периодическое решение существует и единственно тогда и только тогда, когда у оператора монодромии есть единственная неподвижная точка, а это в свою очередь равносильно неравенству $\lambda \neq 1$. Если $\lambda < 1$, то единственное периодическое решение $y \equiv 0$ и всякое другое решение приближается при $x \to +\infty$ к периодическому. Если $\lambda = 1$, то всякое решения является периодическим. Если $\lambda > 1$, то периодическое решение $y \equiv 0$ единственно, а все остальные стремятся к бесконечности при $x \to +\infty$. Аналогичным образом исследуется случай ненулевого b.

(IV) Второй закон Ньютона. Уравнение малых колебаний.

Запишем второй закон Ньютона для тела единичной массы, на которое действует сила $-U'(x)$, где U – гладкая функция. Получаем уравнение

$$\ddot{x} + U'(x) = 0.$$

Если $U(x) = kx^2/2$ и $k > 0$, то соответствующее уравнение

$$\ddot{x} + kx = 0$$

называется уравнением малых колебаний.

Разберем его подробнее. Умножаем уравнение на $\dot{x}$ и получаем равенство

$$\left(\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2}\right)^{\cdot} = 0,$$

из которого следует закон сохранения энергии:

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = E = const.$$

Из закона сохранения видно, что точка с координатами $(x, \dot{x})$ двигается по эллипсам. Пусть $k = \omega^2 > 0$. Рассмотрим вместо $x(t)$ новую функцию $y(s)$: $y(\omega t) = x(t)$. Для $(y, \dot{y})$ выполняется равенство:

$$\dot{y}^2 + y^2 = 2Ek^{-1} = A^2.$$

Предположим, что $A > 0$ (если $A = 0$, то $y \equiv 0$). Рассмотрим малую окрестность U, в которой $\dot{y} \neq 0$ и кривая $s \to (y(s), \dot{y}(s))$ лежит на дуге, длина которой меньше π. Существует непрерывно дифференцируемая функция $\varphi(s)$ такая, что для $s \in U$ $y(s) = A\sin\varphi(s)$, $\dot{y}(s) = A\cos\varphi(s)$. Дифференцируя y получаем равенство

$$A\dot{\varphi}(s)\cos\varphi(s) = A\cos\varphi(s),$$

из которого заключаем $\dot{\varphi}(s) = 1$. Таким образом, $y(s) = A\sin(s+B)$ и

$$x(t) = A\sin(\omega t + B).$$

Конечно, мы доказали это равенство лишь в некотором специальном случае и для t из некоторой малой окрестности, но легко проверить, что функции такого вида являются решениями и выбором A, B для любых начальных условий $(x(0), \dot{x}(0))$ можно подобрать решение с такими начальными условиями. Из закона сохранения следует, что начальными условиями решение определяется однозначно.

Рассмотрим теперь более общую ситуацию, когда U – гладкая функция, причем $U(0) = 0$. Для решений уравнения $\ddot{x} + U'(x) = 0$ выполняется закон сохранения энергии

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + U(x) = E = const.$$

Предположим, что $U'(0) = 0$ и $U''(0) \neq 0$. Для описания движения $x(t)$ в окрестности стационарной точки $x = 0$ полезно изучить линии уровня функции

$$E(x, y) = \frac{y^2}{2} + U(x)$$

в малой окрестности точки $(0, 0)$. Условие $U''(0) \neq 0$ позволяет вместо x ввести новую координату u так, что в окрестности нуля функция $U(u) = \pm u^2$. Пусть для определенности $U''(0) > 0$. Положим

$$u = \operatorname{sig} x \sqrt{U(x)}.$$

Докажем, что это гладкая замена переменных в окрестности $x = 0$. Достаточно найти производную в нуле:

$$u'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sig} x \sqrt{U(x)}}{x} = \lim_{x \to 0} \sqrt{\frac{U(x)}{x^2}} = \sqrt{U''(0)} > 0.$$

Аналогичным образом разбирается случай $U''(0) < 0$. В новых координатах функция E имеет вид $\frac{1}{2}y^2 \pm u^2$ и ее линии уровня — это эллипсы или гиперболы.

(V) Уравнения Лотки — Вольтерры.

Рассмотрим две популяции животных: «зайцы» численностью $Z(t)$ и «волки» численностью $V(t)$. Будем предполагать, что скорость воспроизводства зайцев пропорциональна их численности Z, а уменьшение численности из-за волков пропорционально произведению ZV. Аналогичные предположения, но с противоположными знаками, сделаем про скорость воспроизводства волков. Получаем следующую систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{Z} = (\alpha - \beta V)Z, \\ \dot{V} = (-\gamma + \delta Z)V \end{cases}$$

где α, β, γ, δ — положительные числа.

Точка с координатами $Z = \gamma/\delta = Z_0$ и $V = \alpha/\beta = V_0$ является положением равновесия. Представляет интерес изучение этой системы при малых отклонениях от точки равновесия. Положим $Z = Z_0 + X$ и $V = V_0 + Y$. Тогда X, Y удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \dot{X} = -\beta Y(X + Z_0), \\ \dot{Y} = \delta X(Y + V_0) \end{cases}$$

Если пренебречь произведением XY (считая, что X и Y мало отличаются от нуля), то получим уравнения вида

$$\begin{cases} \dot{X} = -aY, \\ \dot{Y} = bX \end{cases}$$

где $a, b > 0$. Продифференцируем первое уравнение и воспользуемся вторым. Получаем (уже знакомое нам) уравнение малых колебаний $\ddot{X} + abX = 0$. Теперь попытаемся описать движение вблизи точки равновесия и не отбрасывать нелинейные слагаемые. Рассмотрим кривую $t \to (x(t), y(t))$ в окрестности некоторой точки $(x(t_0), y(t_0))$, которая отлична от равновесия. Если окрестность достаточно мала, то можно выразить $t(x)$ или $t(y)$ и получить функцию $y = f(x)$ или $x = f(y)$, график которой является тем самым множеством, которое в этой окрестности рисует данная кривая при изменении t. Удобнее говорить, что это множество является линией уровня некоторой функции $F(x, y)$. Попробуем найти такую функцию F, что точка $(x(t), y(t))$ двигается по линиям уровня $F = C$. Для этого достаточно, чтобы градиент F был перпендикулярен вектору скорости, а это можно записать так:

$$dF = \lambda(x, y)\delta x(y + V_0)dx + \lambda(x, y)\beta y(x + Z_0)dy.$$

Правая часть преобразуется к виду:

$$\lambda(x, y)(y + V_0)(x + Z_0)d\Big(\beta y + \delta x - \beta V_0 \ln|y + V_0| - \delta Z_0 \ln|x + Z_0|\Big).$$

Следовательно, в качестве F можно взять функцию

$$F(x, y) = \beta y + \delta x - \beta V_0 \ln|y + V_0| - \delta Z_0 \ln|x + Z_0|.$$

В малой окрестности $(0, 0)$ линии уровня F замкнуты, что влечет периодичность движения и устойчивость положения равновесия: решение не выходит из заданной окрестности точки равновесия, если начальные данные достаточно мало отличаются от этой точки.

Определения

Дифференциальным уравнением n-го порядка называется выражение

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y, t) = 0,$$

связывающее переменную t функцию $y(t)$ и ее производные до n-го порядка включительно. *Решением* дифференциального уравнения $F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y, t) = 0$ на данном интервале или отрезке называется n раз дифференцируемая функция y, при подстановке которой данное уравнение обращается на этом интервале или отрезке в верное тождество. Особое внимание мы уделим уравнениям первого порядка $y' = f(t, y)$ и системам таких уравнений. В этом случае приняты немного иные обозначения: $\dot{x} = b(t, x)$, где вообще говоря $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ и $b = (b^1, b^2, \dots, b^d)$. Решением является набор из d функций, обращающих данную систему в набор верных тождеств. Пусть $D \subset \mathbb{R}^d$ и I — промежуток в $\mathbb{R}$. Предположим, что b определена на $I \times D$ и мы рассматриваем решения (если таковые имеются) $x\colon I \to D$. В этом случае множество D называется *фазовым пространством*, а множество $I \times D$ называется *расширенным фазовым* пространством. Кривая $(t, x(t))$ в расширенном фазовом пространстве, где $x(t)$ – решение, называется *интегральной кривой*, а ее проекция на D называется *фазовой кривой*. Пример: $\dot{x} = 0$, в этом случае $(t, 1)$ – интегральная кривая (т. е. прямая $x = 1$ на плоскости $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x$), а точка $\{1\}$ — это фазовая кривая.

Говорят, что в области $I \times D$ задано *поле направлений*, если в каждой точке (t, x) задана некоторая прямая $l_{t,x}$. Всякая система уравнений $\dot{x} = b(t, x)$ задает поле направлений в $I \times D$: в каждой точке (t, x) фиксируем прямую с направляющим вектором $(1, b(t, x))$. В этом случае кривая $(t, x(t))$ является интегральной кривой тогда и только тогда, когда в каждой точке касается данного поля направлений (т.е. данных прямых).

Если $b(t, x) = b(x)$ не зависит от t, то говорят, что система $\dot{x} = b(x)$ автономна. Отображение $b\colon D \to \mathbb{R}^d$ называют векторным полем на D. Если $b(t, x)$ зависит от времени t, то систему уравнений $\dot{x} = b(t, x)$ называют неавтономной. Заметим, что добавляя в систему уравнение $\dot{t} = 1$ неавтономную систему можно сделать автономной.

Уравнение с одномерным фазовым пространством.

Пусть $I = (x_1, x_2)$, $b \in C(I)$ и $b(x) \neq 0$ при $x \in I$. Рассмотрим уравнение $\dot{x} = b(x)$, где $x \in I$. Сделаем замену координат в фазовом пространстве $y = g(x)$, где g — диффеоморфизм I на некоторый промежуток J. Тогда $\dot{y} = g'(x)b(x)$. Подберем g так, чтобы правая часть равнялась единице, т. е. $g'(x) = 1/b(x)$. Интегрируя, находим

$$g(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{du}{b(u)}, \quad x_0 \in (x_1, x_2).$$

Уравнение преобразовалось к виду $\dot{y} = 1$. Получаем $y(t) = t - t_0$. Теперь решение $x(t)$ находим из равенства

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{du}{b(u)}.$$

Таким образом, для всякого $x_0 \in (x_1, x_2)$ и всякого t_0 существует интервал J, содержащий t_0, и функция $x(t)$ на этом интервале J такая, что $\dot{x}(t) = b(x(t))$ и $x(t_0) = x_0$. Более того, область значений $x(t)$ при $t \in J$ совпадает с интервалом (x_1, x_2). Единственна ли такая функция?

Интегральные и фазовые кривые

Рассмотрим уравнение $y' = P(x, y)/Q(x, y)$, где мы предполагаем, что $Q \neq 0$ на рассматриваемой области. Полезно вместе с этим уравнением изучить систему уравнений $\dot{x} = Q(x, y)$ и $\dot{y} = P(x, y)$.

Предложение 1.1. *Если на некотором интервале I_x определена функция $y = y(x)$, удовлетворяющая уравнению $y' = P(x, y)/Q(x, y)$ (т.е. задана интегральная кривая $(x, y(x))$), то существует интервал I_t и функции $x(t)$, $y(t)$, удовлетворяющие на I_t системе уравнений $\dot{x} = Q(x, y)$, $\dot{y} = P(x, y)$, такие, что*

$$\{(x, y)\colon\ y = y(x),\ x \in I_x\} = \{(x(t), y(t))\colon t \in I_t\},$$

т.е. интегральная кривая уравнения является фазовой кривой системы уравнений. Верно обратное утверждение.

Доказательство. Пусть $x = x(t)$ и $y = y(t)$ – решения системы. Так как $Q \neq 0$, то $\dot{x} \neq 0$ и можно определить обратную функцию $t = t(x)$. В этом случае фазовая кривая — график функции $y = y(t(x))$. Проверим, что эта функция удовлетворяет уравнению: $y' = \dot{y} \cdot t'(x) = P(x,y)/Q(x,y)$.

Теперь докажем в обратную сторону. Пусть $y = y(x)$ – решение уравнения. Так как $Q(x,y) \neq 0$, то существует решение $x = x(t)$ уравнения $\dot{x} = Q(x, y(x))$. Несложно проверить, что $y = y(x(t))$ удовлетворяет уравнению $\dot{y} = P(x,y)$. Следовательно, график функции $y = y(x)$ является проекцией интегральной кривой на фазовую плоскость. □

2. Уравнение в дифференциалах. Теорема Фробениуса.

Напомним, что решение дифференциального уравнения $y' = f(x,y)$ равносильно отысканию семейства кривых, касающихся в каждой своей точке поля направлений, состоящего из прямых с направляющим вектором $(1, f(x,y))$.

Рассмотрим более общую постановку задачи. Пусть на плоскости в каждой точке (x_0, y_0) уравнением $P(x_0,y_0)(x - x_0) + Q(x_0,y_0)(y - y_0) = 0$ задана прямая l_{x_0,y_0}, где функции P, Q – гладкие и в каждой точке $P^2 + Q^2 > 0$. Требуется найти все кривые, касающиеся в каждой своей точке соответствующей прямой. Для задания прямой достаточно задать линейную функцию $L(h) = Ph_1 + Qh_2$. Тогда прямая задается как $(x_0, y_0) + \mathrm{Ker} L$. Из курса математического анализа мы знаем целый класс важных линейных функций – дифференциалы функций. Например $dx(h) = h_1$ и $dy(h) = h_2$.

Говорят, что на области $D \subset \mathbb{R}^2$ задана *дифференциальная* 1 *-форма* ω, если в каждой точке $(x,y) \in D$ задана линейная функция

$$\omega_{(x,y)}(h) = P(x,y)dx(h) + Q(x,y)dy(h),$$

где P, Q – гладкие функции на D. Далее всегда предполагаем, что $P^2 + Q^2 > 0$. Таким образом, задать поле направлений на области D равносильно определению дифференциальной 1 - формы.

Теперь уточним определение интегральной кривой. Множество $M \subset \mathbb{R}^2$ называется *гладким одномерным подмногообразием*, если для каждой точки $p \in M$ найдется окрестность $U(p)$ такая, что множество $M \bigcap U(p)$ задается уравнением

$$F(x,y) = const,$$

где F – гладкая функция с отличным от нуля градиентом. Отметим, что данное определение можно заменить равносильными:

1) локально множество M является графиком гладкой функции $y = y(x)$ или функции $x = x(y)$;

2) локально множество M является образом отрезка $[0,1]$ при отображении

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)),$$

где $x(t), y(t)$ – гладкие функции и $(\dot{x}, \dot{y}) \neq (0,0)$.

Касательное пространство (*касательная прямая*) в точке p к M – множество векторов, перпендикулярных вектору $(\frac{\partial F(p)}{\partial x}, \frac{\partial F(p)}{\partial y})$.

Интегральная кривая – одномерное подмногообразие M в $\mathbb{R}^2$ такое, что его касательное пространство в точке $p \in M$ совпадает с ядром линейной функции ω_p, т. е. $\omega(h) = 0$ на всех касательных векторах к M в точке p.

Уравнение $\omega = 0$ называется *уравнением в дифференциалах. Решением* этого уравнения называется семейство интегральных кривых.

Если $\omega = Pdx + Qdy$ и $Q \neq 0$, то у функции F, задающей локально интегральную кривую, отлична от нуля частная производная $\frac{\partial F}{\partial y}$ и по теореме о неявной функции интегральная кривая является графиком функции $y = y(x)$. Так как $(1, y'(x))$ – касательный вектор к графику функции $y = y(x)$ и $\omega((1, y'(x))) = 0$, то $P + y'Q = 0$ и $y' = -P/Q$. Если $P \neq 0$, то получаем $x' = -Q/P$.

Уравнение $\omega = 0$ называется *уравнением в полных дифференциалах*, если $\omega = dF$ (говорят, что форма точная).

Предложение 2.1. *Предположим, что $(F_x, F_y) \neq (0,0)$. Тогда*

(i) *линия уровня $F(x,y) = const$ является интегральной кривой уравнения в полных дифференциалах $dF = 0$,*

(ii) *всякая интегральная кривая уравнения $dF = 0$ локально является линией уровня $F(x,y) = const$.*

Доказательство. Пункт (i) очевиден. Докажем пункт (ii). Пусть интегральная кривая задана уравнением $G(x,y) = C$. Тогда $dF = \lambda dG$ и $F = f(G)$, причем $f' \neq 0$. □

Разделение переменных

Пусть $\omega = A(x)\,dx + B(y)\,dy$. Решения уравнения $\omega = 0$ очевидно являются линиями уровня функции

$$F(x,y) = \int A(x)\,dx + \int B(y)\,dy.$$

Это наблюдение часто используют как некое формально правило: для решения уравнение $A(x)dx + B(y)dy = 0$ достаточно проинтегрировать правую и левую части и выписать ответ в следующем виде

$$\int A(x)\,dx + \int B(y)\,dy = const.$$

Простое необходимое и достаточное условие точности формы сформулировано в следующем утверждение.

Предложение 2.2. (Лемма Пуанкаре) *Пусть U – круг на плоскости. Форма ω точна в круге U тогда и только тогда, когда $\partial_y P = \partial_x Q$ (говорят, что форма замкнута).*

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность такого условия. Предположим для простоты, что U – круг с центром $(0,0)$. Положим

$$F(x,y) = \int_0^1 \Big[P(xt,yt)x + Q(xt,yt)y\Big]\,dt.$$

Вычисляем $\partial_x F$:

$$\partial_x F(x,y) = \int_0^1 \Big[\partial_x P(xt,yt)tx + P(xt,yt) + \partial_x Q(xt,yt)yt\Big]\,dt.$$

Заметим, что
$$\frac{d}{dt}(P(xt,yt)t) = \partial_x P(xt,xy)xt + \partial_y P(xt,yt)yt + P(xt,yt),$$
Следовательно, выполняется равенство
$$\partial_x P(xt,yt)tx + P(xt,yt) + \partial_x Q(xt,yt)yt = \frac{d}{dt}(P(xt,yt)t).$$
Здесь лишние слагаемые сократились из-за замкнутости формы ω. По формуле Ньютона–Лейбница
$$\partial_x F(x,y) = P(x,y).$$
Аналогичным образом проверяем равенство $\partial_y F(x,y) = Q(x,y)$. □

Аналогичным образом можно рассматривать 1-дифференциальные формы, заданные на области $U \subset \mathbb{R}^n$. Определение полностью повторяет предыдущее: говорят, что на U задана 1-дифференциальная форма ω_x, если в каждой точке $x \in U$ определена линейная функция
$$\omega_x = a_1(x)\,dx_1 + \ldots + a_n(x)\,dx_n,$$
причем a_i являются гладкими функциями.

Всякая билинейная кососимметрическая форма $\omega(\xi,\eta)$ имеет вид
$$\omega(\xi,\eta) = \sum_{i<j} a_{ij} \begin{vmatrix} \xi_i & \eta_i \\ \xi_j & \eta_j \end{vmatrix}.$$
Если в каждой точке x открытого множества U задана билинейная кососимметрическая форма ω_x, причем функции a_{ij} непрерывны на U, то говорят, что на U задана дифференциальная два форма ω_x. Дифференциальные два формы из один форм принципиально можно получить двумя способами: внешним умножением один форм или внешним дифференцированием один форм.

Пусть ω^1 и ω^2 – дифференциальные один формы. Тогда
$$\omega^1 \wedge \omega^2(\xi,\eta) = \omega^1(\xi)\omega^2(\eta) - \omega^1(\eta)\omega^2(\xi) = \begin{vmatrix} \omega^1(\xi) & \omega^1(\eta) \\ \omega^2(\xi) & \omega^2(\eta) \end{vmatrix}$$
является дифференциальной два формой. Операция $\wedge$ называется внешним умножением. Например
$$dx_i \wedge dx_j(\xi,\eta) = \begin{vmatrix} \xi_i & \eta_i \\ \xi_j & \eta_j \end{vmatrix}.$$
Следовательно, можно дифференциальную два форму записать в виде
$$\omega = \sum_{i<j} a_{ij} dx_i \wedge dx_j.$$
Простейшие свойства внешнего умножения:

$\omega^1 \wedge \omega^2 = -\omega^2 \wedge \omega^1$, $\omega^1 \wedge \omega^1 = 0$, $(\omega^1 + \omega^2) \wedge \omega^2 = \omega^1 \wedge \omega^3 + \omega^2 \wedge \omega^3$.

В общем случае внешнее умножение двух кососимметрических форм ω^k и ω^l определяется так:
$$\omega^k \wedge \omega^l(\xi_1,\ldots,\xi_{k+l}) = \frac{1}{(k+l)!}\sum_\sigma (\mathrm{sig}\sigma)\omega^k(\xi_{\sigma(1)},\ldots,\xi_{\sigma(k)})\omega^l(\xi_{\sigma(k+1)},\ldots,\xi_{\sigma(k+l)}).$$

Например:

$$\omega^1 \wedge \omega^2(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{1}{3}\Big(\omega^1(\xi_1)\omega^2(\xi_2, \xi_3) - \omega^1(\xi_2)\omega^2(\xi_1, \xi_3) + \omega^1(\xi_3)\omega^2(\xi_1, \xi_2)\Big).$$

Пусть $\omega = a_1 dx_1 + \ldots + a_n dx_n$. Положим

$$d\omega = da_1 \wedge dx_1 + \ldots + da_n \wedge dx_n = \sum_{i<j}\Big(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} - \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\Big)dx_i \wedge dx_j.$$

Отображение $\omega \to d\omega$ называется внешним дифференцированием.

Лемму Пуанкаре теперь можно сформулировать в более общем виде: если U – шар в $\mathbb{R}^n$, то точность один формы ω равносильная равенству $d\omega = 0$.

В общем случае отыскание интегральной кривой уравнения $\omega = 0$ сводится к решению дифференциального уравнения $y' = -P/Q$ или $x' = -Q/P$. Следовательно, для гладких P и Q через любую точку области U проходит интегральная кривая. Более того, можно показать (но мы оставим это без обоснования), что локально множество интегральных кривых совпадает с множеством линий уровня некоторой гладкой функции F. Так как вектор (P, Q) пропорционален вектору $(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y})$, то уравнение в дифференциалах можно умножением на некоторую функцию $\mu(x, y)$ привести (по крайней мере локально) к уравнению в полных дифференциалах.

В трехмерном пространстве ситуация совершенно иная. Пусть P, Q, R – гладкие функции на $\mathbb{R}^3$, причем $P^2 + Q^2 + R^2 > 0$. Рассмотрим дифференциальную форму $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$. Эта дифференциальная форма задает поле плоскостей в пространстве $\mathbb{R}^3$. По аналогии с двумерным случаем можно поставить локальную задачу отыскания двумерной поверхности, т. е. множества уровня функции $F(x, y, z)$ такой, что градиент F отличен от нуля, касательная плоскость

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(z - z_0) = 0$$

к которой в каждой точке совпадает с плоскостью, задаваемой формой ω. Гладкую двумерную поверхность локально можно задавать параметрически $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ с помощью таких гладких функций $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$, что

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} = 2.$$

Далее кратко пишем $r = r(u, v)$ и r_u, r_v – первая и вторая строчка матрицы. Несложно проверить, что касательная плоскость натянута на векторы r_u и r_v.

Оказывается, что интегральная поверхность не всегда существует даже в случае гладких коэффициентов. Рассмотрим пример: $zdx + dy = 0$. Можно считать, что интегральная поверхность является графиком функции $y = f(x, z)$. Вектор $(-f_x, 1, -f_z)$ коллинеарен вектору $(z, 1, 0)$ и должны выполняться равенства $f_x = z$ и $f_z = 0$, что невозможно.

Следующее утверждение является частным случаем теоремы Фробениуса.

Теорема 2.1. *Пусть $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$. Для всякой точки в некоторой ее окрестности существует проходящая через эту точку интегральная поверхность уравнения $\omega = 0$ тогда и только тогда, когда $\omega \wedge d\omega = 0$.*

Нам потребуется вспомогательное утверждение.

Лемма 2.1. *Пусть гладкая двумерная поверхность* $r = r(u, v)$ *такова, что*

$$\omega_{r(u,v)}(r_u(u, v)) = 0.$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial u}\omega_{r(u,v)}(r_v(u, v)) = d\omega_{r(u,v)}(r_u(u, v), r_v(u, v)).$$

Доказательство. Дифференцируя по v равенство $Px_u + Qy_u + Rz_u = 0$ получаем

$$Px_{uv} + Qy_{uv} + Rz_{uv} = -\big(dP(r_v)x_u + dQ(r_v)y_u + dQ(r_v)z_u\big).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial u}\omega_{r(u,v)}(r_v(u, v)) = dP(r_u)x_v + dQ(r_u)y_v + dR(r_u)z_v - \big(dP(r_v)x_u + dQ(r_v)y_u + dQ(r_v)z_u\big) = d\omega(r_u, r_v).$$

□

Теперь докажем теорему.

Доказательство. Необходимость очевидна: в каждой точке пространства можно выбрать три неколлинеарных вектора ξ, η, ζ так, что ξ и η образуют базис касательного пространства к интегральной поверхности. По лемме $d\omega(\xi, \eta) = 0$ и, следовательно, $\omega \wedge d\omega(\xi, \eta, \zeta) = 0$.

Докажем достаточность. Пусть $R \neq 0$. Построим проходящую через начало координат интегральную поверхность $r = r(u, v)$ следующим образом. Пусть $r(o, v)$ – проходящая через начало координат (при $v = 0$) интегральная кривая (в плоскости $y = 0$) формы ω, ограниченной на плоскость $y = 0$. Проведем через точку $r(0, v)$ параллельную плоскости $x = 0$ плоскость Π_v и проведем в ней проходящую через точку $r(0, v)$ (при $u = 0$) интегральную кривую $u \to r(u, v)$ формы ω, ограниченной на Π_v. Оставим без обоснования гладкость отображения $(u, v) \to r(u, v)$. Заметим только, что в точке $(0, 0, 0)$ векторы r_u и r_v отличны от нуля и перпендикулярны. Следовательно, в малой окрестности нуля $r(u, v)$ задает гладкую двумерную поверхность. По построению $\omega_{r(u,v)}(r_u) = 0$. Так как

$$0 = 3\omega \wedge d\omega(r_u, r_v, e) = \omega(e)d\omega(r_u, r_v) - \omega(r_v)d\omega(r_u, e), \quad \omega(e) = R \neq 0,$$

то

$$\frac{\partial}{\partial u}\omega(r_v) = \omega(r_v) \cdot Q(u, v), \quad \omega(r_v)|_{u=0} = 0.$$

Следовательно, $\omega(r_v) = 0$ и поверхность $r(u, v)$ является интегральной поверхностью уравнения $\omega = 0$. □

3. Замена координат в фазовом пространстве. Линейные системы второго порядка. Перенос векторного поля.

Замена координат в фазовом пространстве.

Рассмотрим систему уравнений $\dot{x} = b(x)$, где b — векторное поле на области $D \subset \mathbb{R}^d$. Сделаем замену переменных $y = g(x)$, где g диффеоморфизм области D на область Ω. В новых координатах:

$$\dot{y} = g'(g^{-1}(y))b(g^{-1}(y)),$$

где g' – матрица Якоби отображения g. Полезно находить замены переменных, упрощающие систему уравнений. Рассмотрим следующий очень важный пример.

Линейные системы второго порядка.

Изучим линейную двумерную систему уравнений с постоянной матрицей.

Рассмотрим систему $\dot{x} = Ax$, где $x \in \mathbb{R}^2$ и A – постоянная матрица 2×2. Изучим только невырожденный случай, когда все собственные значения отличны от нуля.

Отметим, что начало координат является особой точкой этой системы. Действительно, $x = 0$ – стационарное решение и представляет интерес изучение решений в окрестности этой точки.

(I) Собственные значения вещественные. Тогда существует базис, в котором матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

В первом случае решения в этом базисе задаются координатами: $x_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}$, $x_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}$. Исключая t получаем уравнение фазовых кривых

$$x_2 = c_2 \Big(\frac{x_2}{c_1}\Big)^{\lambda_1/\lambda_2}.$$

Если $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$, то особая точка называется *узлом.* Если $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$, то особая точка называется *седлом.* Если же $\lambda_1 = \lambda_2$, то особую точку называют *дикритическим узлом.*

Во втором случае решаем сначала уравнение $\dot{x}_2 = \lambda x_2$ и получаем $x_2(t) = c_2 e^{\lambda t}$, а затем подставляем в уравнение $\dot{x}_1 = \lambda x_1 + x_2$ и находим $x_1(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}$. Исключая t находим уравнение фазовых кривых $x_1 = \frac{c_1}{c_2} x_2 + \frac{x_2}{\lambda} \ln \frac{x_2}{c_2}$ и $x_2 = 0$. В этом случае особая точка $x = 0$ называется *вырожденным узлом.*

(II) Собственные значения комплексные $\alpha + i\beta$ и $\alpha - i\beta$. Тогда матрицу можно привести к виду

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Запишем систему уравнений в полярной системе координат. Уравнения фазовых кривых имеют вид

$$r(\varphi) = r_0 e^{\frac{\alpha}{\beta}\varphi}.$$

Хорошо видно, что в зависимости от α и β возможны различные виды фазовых кривых. Если $\alpha = 0$ и фазовые кривые — окружности, то особую точку называют *центром.* Если $\alpha \neq 0$ и фазовые кривые — логарифмические спирали, то особую точку называют *фокусом.*

Интересно, что эти результаты остаются верными для нелинейных систем и позволяют по их линейной части нарисовать примерный фазовый портрет в случае ненулевых собственных значений матрицы линейной части. Однако в случае, когда хотя бы одно собственное значение равно нулю, добавление нелинейных слагаемых, малых по сравнению с линейными, может существенно поменять фазовый портрет.

Перенос векторного поля

Пусть $\varphi\colon D \to \Omega$ – диффеоморфизм и на D определено векторное поле b. Говорят, что векторное поле

$$\varphi_* b(y) = \varphi'(\varphi^{-1}(y))b(\varphi^{-1}(y))$$

является результатом переноса b под действием отображения φ. Если $x(t)$ – решение уравнения $\dot{x} = b(x)$, то $y(t) = \varphi(x(t))$ является решением уравнения $\dot{y} = \varphi_* b(y)$.

Пусть теперь $\varphi\colon D \to D$, т.е. $\Omega = D$. Диффеоморфизм φ называется симметрией поля b, если $\varphi_* b = b$.

4. Группы преобразований. Векторные поля. Коммутатор векторных полей. Теорема Ли.

Будем говорить, что задана однопараметрическая группа преобразований T_a области $D \subset \mathbb{R}^n$ (допускается $D = \mathbb{R}^n$), если для всякого $t \in \mathbb{R}$ задан диффеоморфизм $g^t\colon D \to D$, причем $g^0 = id$ и $g^t \circ g^s = g^{t+s}$.

Примеры однопараметрических групп преобразований плоскости:

(1) параллельный перенос $y_1 = x_1 + ta_1$, $y_2 = x_2 + ta_2$,

(2) гомотетия $y_1 = e^t x_1$, $y_2 = e^t x_2$,

(3) поворот $y_1 = \cos tx_1 + \sin tx_2$, $y_2 = -\sin tx_1 + \cos tx_2$,

(4) преобразование Лоренца $y_1 = \mathrm{ch} tx_1 + \mathrm{sh} tx_2$, $y_2 = \mathrm{sh} tx_1 + \mathrm{ch} tx_2$,

(5) преобразование Галилея $y_1 = x_1 + tx_2$, $y_2 = x_2$.

Будем предполагать, что $g^t(x)$ гладко зависит от t и x. Для каждого x отображение $t \to g^t(x)$ задает кривую в области D. Пусть

$$b(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g^t(x).$$

Проверим, что

$$\frac{d}{dt} g^t(x) = b(g^t(x)).$$

Действительно, имеем

$$\lim_{s\to 0} \frac{g^{s+t}(x) - g^t(x)}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{g^s(g^t(x)) - g^t(x)}{s} = b(g^t(x)).$$

Таким образом, группа преобразований g^t определяет векторное поле b и наоборот векторное поле b полностью определяет группу преобразований g^t. Здесь мы используем утверждение, которое докажем позднее, а именно, теорему о том, что для достаточно регулярного b начальными условиями решение дифференциального уравнения $\dot{x} = b(x)$ определяется однозначно.

С группой преобразований можно связать дифференциальный оператор на пространстве гладких функций $C^\infty(D)$. Пусть $f \in C^\infty(D)$. Положим

$$Lf(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(g^t(x)).$$

Выражение $Lf(x)$ является производной функции f вдоль кривой $t \to g^t(x)$ при $t = 0$. Используя правило дифференцирования сложной функции, получаем

$$Lf(x) = b^1(x)f_{x_1}(x) + \ldots + b^n(x)f_{x_n}(x).$$

Какие дифференциальные операторы соответствуют группам преобразований из примеров (1)–(5)?

Интересно, что всякий дифференциальный оператор первого порядка имеет такой вид

Будем говорить, что *линейное* отображение $L\colon C^\infty(D) \to C^\infty(D)$ является *оператором дифференцирования первого порядка*, если выполняется правило Лейбница

$$L(fg) = fL(g) + gL(f)$$

Из правила Лейбница легко вывести, что $L(f)(x_0) = 0$ для всякой функции f такой, что $f(x) = (x - x_0)g(x)$ и $g(x_0) = 0$. Действительно,

$$L(g(x)(x-x_0))|_{x=x_0} = \Bigg(g(x)L(x-x_0) + (x-x_0)L(g)\Bigg)\Big|_{x=x_0} = 0.$$

Теперь заметим, что $f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = (x - x_0)g(x)$, где

$$g^i(x) = \int_0^1 (1-t)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0 + t(x - x_0))(x_j - x_{j0})\, dt.$$

Следовательно, верно равенство:

$$L(f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0))(x_0) = 0.$$

Заметим, что правило Лейбница влечет $L1 = 0$. Положим $b^i(x) = L(x^i)$. Тогда $L(f)(x) = b^i(x)\partial_{x_i} f(x)$.

Итак, однопараметрическая группа преобразований определяет векторное поле или, что эквивалентно, дифференцирование вдоль векторного поля. В дальнейшем мы узнаем, что верно обратное: достаточно регулярное векторное поле определяет однопараметрическую группу преобразований.

Коммутатор векторных полей

Пусть заданы две группы преобразований g^t и h^t и пусть b и c – соответствующие им векторные поля. Рассмотрим выражение:

$$F(t,s) = f(g^t(h^s(x))) - f(h^s(g^t(x))), \quad f \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Так как $F(t, 0) = 0$ и $F(0, s) = 0$, то разложение Тейлора в точке $(0, 0)$ этой функции начинается с ts и не содержит членов первого порядка и t^2, s^2. Легко проверить, что

$$\frac{\partial^2 F(0,0)}{\partial t \partial s} = \big(L_c \circ L_b - L_b \circ L_c\big)\varphi(x),$$

где L_b и L_c – дифференциальные операторы, порождаемые g^t и h^s.

Коммутатором дифференциальных операторов L_b и L_c называют дифференциальный оператор вида

$$[L_b, L_c] = L_b \circ L_c - L_c \circ L_b.$$

Несложно проверить, что это снова дифференциальный оператор первого порядка. Соответствующее ему векторное поле называется коммутатором векторных полей b и c. Более того, выполняются свойства

a) $[L_b, L_c + \gamma L_v] = [L_b, L_c] + \gamma[L_b, L_v]$,

b) $[L_b, L_c] = -[L_c, L_b]$,

c) $[L_b, [L_c, L_v]] + [L_c, [L_v, L_b]] + [L_v, [L_b, L_c]] = 0$.

Линейное пространство, на котором задана бинарная операция, удовлетворяющая свойствам a), b), c), называется алгеброй Ли.

Предложение 4.1. *Группы преобразований g^t и h^s коммутируют ($g^t \circ h^s = h^s \circ g^t$)при малых t, s тогда и только тогда, когда $[L_b, L_c] = 0$.*

Доказательство. Если преобразования коммутируют, то $f(g^t(h^s(x))) = f(h^s(g^t(x)))$ и из разложения Тейлора следует $[L_b, L_c] = 0$. Пусть теперь известно, что $[L_b, L_c] = 0$. Тогда

$$\|g^t(h^s(x)) - h^s(g^t(x))\| = o(t^2 + s^2), \quad t, s \to 0.$$

Фиксируем t, s. Имеем

$$\|g^{t/N}(h^{s/N}(x)) - h^{s/N}(g^{t/N}(x))\| = o(N^{-2}).$$

Для того чтобы перейти от

$$g^t \circ h^s = g^{t/N} \circ \ldots \circ g^{t/N} \circ h^{s/N} \circ \ldots h^{s/N},$$

где $g^{t/N}$ и $h^{s/N}$ повторяются N раз, к выражению

$$h^s \circ g^t = h^{s/N} \circ \ldots \circ h^{s/N} \circ g^{t/N} \circ \ldots g^{t/N},$$

где $g^{t/N}$ и $h^{s/N}$ повторяются N раз, надо N^2 раз поменять $g^{t/N}$ и $h^{s/N}$ местами. Следовательно, $\|g^t(h^s(x)) - h^s(g^t(x))\| \leq o(1)$ при $N \to \infty$, а это означает равенство $g^t(h^s(x)) = h^s(g^t(x))$. □

Итак, коммутатор векторных полей (или дифференциальных операторов) отвечает за коммутирование соответствующих групп преобразований.

Предположим, что задан диффеоморфизм $\varphi\colon D \to D$. Тогда определена новая группа преобразований $\widetilde{g}^t = \varphi \circ g^t \circ \varphi^{-1}$. Легко проверить, что новой группе преобразований соответствует векторное поле $\varphi_* b$. Напомним, что векторное поле однозначно определяет группу преобразований и определяется группой преобразований.

Предложение 4.2. *Диффеоморфизм φ является симметрией векторного поля b (соответствует группе преобразований g^t) тогда и только тогда, когда $\varphi \circ g^t = g^t \circ \varphi$.*

Проиллюстрируем это следствие следующей задачей: найти все симметрии векторного поля $x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$. Фазовый поток в этом случае устроен просто $g^t(y) = e^t y$. Следовательно, диффеоморфизм ψ является симметрией этого векторного поля тогда и только тогда, когда $e^t\psi(y) = \psi(e^t y)$. Отсюда немедленно заключаем, что $\psi(y) = Ay$, где $\det A \neq 0$.

Следствие 4.1. *Пусть заданы группы преобразований g^t и h^s, а b и c – соответствующие им векторные поля. Группа преобразований h^s является симметрией векторного поля b тогда и только тогда, когда $[b, c] = 0$.*

Таким образом, поиск однопараметрических групп симметрий векторного поля b (и соответствующего дифференциального уравнения) эквивалентен поиску коммутирующих с b векторных полей. Более того, оказывается, что наличие группы симметрий в некоторых случаях позволяет решить дифференциальное уравнение. Проиллюстрируем это следующим утверждением, которое является частным случаем теоремы Ли.

Говорят, что система уравнений $\dot{x} = b(x)$, где b – гладкое векторное поле на области $D \subset \mathbb{R}^n$, *интегрируема в квадратурах*, если локально все ее решения можно получить с помощью алгебраических операций, теоремы о неявной функции и интегрирования.

Рассмотрим случай $n = 2$.

Предложение 4.3. *Пусть $B^1 = P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y}$ – гладкое векторное поле на $\mathbb{R}^2$. Предположим, что существует гладкое векторное поле $B^2 = R\frac{\partial}{\partial x} + S\frac{\partial}{\partial y}$ такое, что B^1 и B^2 в каждой точке линейно независимы и $[B^1, B^2] = 0$. Тогда система дифференциальных уравнений $\dot{X} = B^1$, где $X = (x, y)$, интегрируема в квадратурах.*

Доказательство. Заметим, что если найти гладкую функцию $F(x, y)$ такую, что $(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}) \neq (0, 0)$ и $B^1 F = 0$, то систему легко проинтегрировать. Действительно, из равенства $B^1 F = 0$ следует, что фазовые кривые лежат на линиях уровня F. Следовательно, выражая из уравнения $F(x, y) = const$ переменную y через x и подставляя $y(x)$ в уравнение $\dot{x} = P(x, y)$, приходим к уравнению с разделяющимися переменными. Отметим, что такая функция F всегда существует и вопрос только в ее нахождении с помощью разрешенных операций. Функцию F такую, что $B^1 F = 0$ называют первым интегралом системы $\dot{X} = B^1$.

Итак, пусть F – первый интеграл и $(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}) \neq (0, 0)$. Тогда $B^2 F$ также является первым интегралом. Действительно, имеет место равенство

$$B^1(B^2 F) = [B^1, B^2]F + B^2(B^1 F) = 0.$$

Несложно показать, что $B^2 F = G(F)$ для некоторой гладкой функции $G \neq 0$. Положим

$$g(u) = \int \frac{du}{G(u)}.$$

Заметим, что $g(F)$ – первый интеграл и $B^2 g(F) = 1$. Положим $\widetilde{F} = g(F)$. Тогда частные производные $\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial x}$ и $\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial y}$ удовлетворяют линейной системе уравнений

$$\begin{cases} P\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial x} + Q\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial y} = 0, \\ R\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial x} + S\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial y} = 1. \end{cases}$$

Решая эту систему, а затем интегрируя, находим функцию $\widetilde{F}$. □

Поле B^2 называют симметрией поля B^1. Из доказательства легко усмотреть, что утверждение останется верным, если $[B^1, B^2] = \lambda B^1$, где λ – некоторое число.

5. Симметрии поля направлений. Однородные уравнения.

Замена координат в расширенном фазовом пространстве

Выше мы сделали замену переменных в фазовом пространстве. Сделаем замену переменных в расширенном фазовом пространстве:

$$y = g(x,t), \quad s = h(x,t).$$

Имеем

$$\dot{y} = g_x \dot{x} + g_t, \quad \dot{s} = h_x \dot{x} + h_t$$

и

$$\frac{dy}{ds} = \frac{g_x b + g_t}{h_x b + h_t}.$$

Вместо переноса векторных полей (как в фазовом пространстве) в данном случае можно говорить о переносе поля направлений. Исходная система задает поле направлений с помощью векторов $v = (1, b)$. Векторное поле v при замене координат $y = g(x,t)$, $s = h(x,t)$ переходит в векторное поле

$$\begin{pmatrix} h_t + h_x b \\ g_t + g_x b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_t & h_x \\ g_t & g_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}.$$

Семейство прямых, которое определяет в расширенном фазовом пространстве новое векторное поле, является в точности полем направлений для новой системы уравнений и именно его мы будем называть образом поля направлений при замене координат.

Будем говорить, что диффеоморфизм ψ расширенного фазового пространства на себя является симметрией поля направлений, если при переносе под действием ψ поле направлений переходит в себя.

Предложение 5.1. *Предположим, что существует однопараметрическая группа g^s симметрий поля направлений уравнения $\dot{x} = b(t,x)$, причем для некоторой точки $z_0 = (t_0, x_0)$ выполнено $\frac{d}{ds} g^s(z_0)|_{s=0} \neq 0$. Тогда в малой окрестности точки z_0 можно так ввести новые координаты, что группа симметрий превратиться в группу сдвигов по времени, в частности дифференциальное уравнение в новой системе координат не будет зависеть от t.*

Доказательство. Доказательство проведем в случае, когда $x \in \mathbb{R}^1$. Будем предполагать, что вектор $\frac{d}{ds}g^s(z_0)|_{s=0}$ и вектор $(0,1)$ неколлинеарны. Проведем вертикальную прямую $t = t_0$. Рассмотрим отображение $(s,y) \to (t,x)$ заданное следующим образом:

$$(t,x) = g^s((t_0,y)),$$

т.е. (t,x) – образ точки (t_0,y) под действием группы симметрий за время s. При малых s и $|y - x_0|$ данное отображение является диффеоморфизмом. Более того,

$$g^\tau(t,x) = g^{\tau+s}((t_0,y)),$$

т.е. группа преобразований превратилась в группу сдвигов времени. □

Рассмотрим пример. Предположим, что вектороное поле b на $\mathbb{R}^1$ однородно, т. е. $b(\lambda t, \lambda x) = b(t,x)$.

Группа преобразований $g^s((t,x)) = (e^s t, e^s x)$ является группой симметрий поля направлений. Сделаем замену переменных $x = e^s y$, $t = e^s$, т.е.$(t,x) = g^s((1,y))$. В новых координатах уравнение имеет вид:

$$\frac{dy}{ds} = b(e^s, e^s y) - y = b(1,y) - y.$$

В новом уравнении легко разделяются переменные.

6. Основные теоремы

Выше мы неоднократно использовали в наших построениях утверждения о существовании, единственности и гладкой зависимости от параметров решения уравнения $\dot{x} = b(t,x)$, удовлетворяющего начальному условию $x(t_0) = x_0$. В этом разделе мы сформулируем и строго докажем такие утверждения.

Существование и единственность

Пусть $D \subset \mathbb{R}^d$ – открытое множество, $T > 0$ и $D_T = [0,T] \times D$. Предположим, что задано отображение $b\colon D_T \mapsto \mathbb{R}^d$. Пусть $x_0 \in D$. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = b(x,t), \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1}$$

Дифференцируемое отображение $x\colon [0,\tau] \mapsto D$, где $0 < \tau \le T$, является решением задачи Коши (1), если $x(0) = x_0$ и $\dot{x}(t) = b(x(t),t)$ для всех $t \in [0,\tau]$.

Теорема 6.1. *Если b^i – непрерывны по совокупности переменных на D_T и по переменной x удовлетворяет условию Липшица:*

$$|b^i(x,t) - b^i(y,t)| \le L|x-y| \quad \forall (x,t),(y,t) \in D_T,$$

то для всякой точки $x_0 \in D$ найдется такое $\tau > 0$, что на отрезке $[0,\tau]$ существует решение задачи Коши. Более того, для любых двух решений x и y найдется такое $\tau > 0$, что $x \equiv y$ на $[0,\tau]$.

Доказательство. Найдем число $r > 0$ такое, что шар $B_r(x_0) = \{x\colon |x - x_0| \le r\}$ лежит в D. Пусть $0 < \tau < T$. Положим $K = [0,\tau] \times B_r(x_0)$. Поскольку K компакт, то

$$\max_K |b| = M < \infty.$$

Пусть $X = \{x \in C([0,\tau])\colon \max_{t\in[0,\tau]}|x(t)-x_0| \le r\}$. Ясно, что X – полное метрическое пространство относительно метрики, задаваемой нормой $\|x\| = \max_{t\in[0,\tau]}|x(t)|$. Определим отображение $F\colon X \mapsto X$ следующим образом:

$$F(x)(t) = x_0 + \int_0^t b(x(s), s)\, ds.$$

Это отображение действительно принимает значения в X при достаточно малом τ, так как

$$|F(x)(t) - x_0| \le M|t| \le M\tau.$$

Кривая $x \in C([0,\tau])$ является решением задачи Коши тогда и только тогда, когда она является неподвижной точкой отображения F. Действительно, в одну сторону это утверждение получается простым интегрированием, а в обратную достаточно заметить, что в равенстве

$$x(t) = x_0 + \int_0^t b(x(s), s)\, ds$$

справа стоит непрерывно дифференцируемая функция, а значит $x(t)$ непрерывно дифференцируема.

Проверим теперь, что F является сжимающим отображением, если правильно выбрать τ. Заметим, что

$$|F(x)(t) - F(y)(t)| \le \int_0^t |b(x(s), s) - b(y(s), s)|\, ds \le L\tau\|x - y\|.$$

Пусть $\tau < \min\{1/L, r/M\}$. Тогда отображение F сжимающее. По теореме о сжимающем отображении у F существует единственная неподвижная точка. $\square$

Замечание 6.1. Условие Липшица выполняется, например, если множество D выпукло и отображения b^i имеют в D_T ограниченные производные первого порядка по переменной x. Действительно, по теореме Лагранжа имеет место равенство

$$|b^i(y,t) - b^i(x,t)| = \Big|\frac{d}{ds} b^i(x + s(y-x), t)|_{s=c}\Big| \le \sup_{D_T}|\partial_x b||x - y|.$$

Более того, из-за того, что утверждение теоремы локальное (мы работали только на шаре $B_r(x_0)$, а не на всей области D), то доказанная выше теорема верна, если условие Липшицевости заменить предположением, что функции b^i имеют непрерывные частные производные по x в области D_T.

Наконец отметим, что доказательство дословно переносится на случай, когда время отсчитывается не с нуля, а с произвольного момента $t_0 \in [0, T)$.

Далее всегда предполагаем, что b и $\partial_x b$ непрерывны на D_T.

При доказательстве теоремы о неподвижной точки сжимающего отображения проверяется, что последовательность $x_{n+1} = F(x_n)$ сходится к неподвижной точке. В нашей ситуации равенство $x_{n+1} = F(x_n)$ имеет вид

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t b(x_n(s), s)\, ds,$$

причем можно считать, что $x_0(t) \equiv x_0$. Последовательность функций x_n называется приближениями Пикара.

Пример:

$$x_{n+1}(t) = 1 + \int_0^t x_n(t)\,dt, \quad x_0(t) = 1.$$

Несложно индукцией доказать, что $x_n(t) = \sum_{k=0}^{n} t^k/k!$.

Заметим, что решение построено лишь на некотором малом отрезке $[0, \tau]$, а вся интегральная кривая $x(t)$ лежит в малой окрестности точки $(x_0, 0)$. Более того, мы не знаем единственно ли решение, так как по теореме всякие два решения совпадают лишь в некоторой малой окрестности начального условия.

Лемма 6.1. *Предположим, что $b, \partial_x b \in C(D_T)$. Если y и z — решения задачи Коши (1) на $[0, s]$ для некоторого $s \le T$, то $x(t) = z(t)$ для всех $t \in [0, s]$.*

Доказательство. Пусть $t^* = \sup\{t \le s\colon\ x(t) = z(t)\}$. Непрерывность влечет равенство $x(t^*) = z(t^*)$. Предположим, что $t^* < s$. По теореме существования найдется $\delta > 0$ такое, что на отрезке $[t^*, t^* + \delta]$ существует единственное решение задачи Коши $\dot{x} = b(t, x)$, $x(t^*) = y(t^*)$, но такими решениями являются z и y. Следовательно, $z(t) = y(t)$ на $[t^*, t^* + \delta]$, что противоречит определению t^*. □

Таким образом, любые два решения задачи Коши (1) на общем отрезке совпадают.

Пусть S точная верхняя грань значений $s < T$ таких, что на отрезке $[0, s]$ существует решение задачи Коши.

Теорема 6.2. *Предположим, что $S < T$. При $t \to S$ решение $x(t)$ выходит из любого компакта $K \subset D$, т. е. существует такой момент времени $\tau < S$, что $x(t) \notin K$ для всех $t > \tau$.*

Доказательство. Предположим, что это не так, т. е. существует последовательность t_n, сходящаяся к S и такая, что $x(t_n) \in K$. Тогда в силу компактности K можно считать, что $x(t_n) \to y \in K \subset D$. Пусть $B_R(y) \subset D$,

$$M = \max_{[0,T]\times B_R(y)} |b| + \max_{[0,T]\times B_R(y)} |\partial_x b|.$$

По теореме для всяких $(s, z) \in (0, T) \times B_R(y)$ существует число $\delta > 0$, для которого на отрезке $[s, s+\delta]$ существует единственное решение. Более того, число δ зависит только от M и R. Выберем номер n такой, что $|t_n - S| < \delta$ и $|x(t_n) - y| < R$. Тогда решение продолжается на отрезок $[t_n, t_n+\delta]$ и $t_n+\delta > S$. Противоречие с определением S. □

Из доказанной теоремы следует, что если $D = \mathbb{R}^d$ и $S < T$, то решение уходит в бесконечность при $t \to S$. Это явление называют взрывом или разрушением решения (blow up). Важной задачей является определение времени S.

Пример: $\dot{x} = x^2$, $x(0) = 1$. Решение $x(t) = 1/(1 - t)$ и при $x(t) \to +\infty$ при $t \to 1$.

Сформулируем простое достаточное условие продолжаемости решения на $[0, T)$.

Априорная оценка

Пусть $D = \mathbb{R}^d$. Предположим, что существует непрерывная функция $M(t)$ на $[0, T)$ такая, что $\max_{[0,\tau]} |x(t)| \le M(\tau)$ для всякого решения x задачи Коши (1), если таковое существует на отрезке $[0,\tau]$. В этом случае очевидно, что решение продолжается на весь полуинтервал $[0,T)$.

Важный пример: предположим, что

$$\langle b(x,t),x\rangle \le A+B|x|^2,$$

где $A,B>0$. Тогда

$$\frac{d}{dt}|x(t)|^2 \le A+B|x|^2.$$

Интегрируя приходим к неравенству

$$|x(t)|^2 \le |x(0)|^2e^{Bt}+\frac{A}{B}(e^{Bt}-1).$$

Следовательно, $x(t)$ продолжается на $[0,T)$. Так будет для решений линейных систем $\dot{x}=A(t)x$, где коэффициенты матрицы A являются непрерывными функциями на $[0,T]$.

Неравенство Гронуолла

Теорема 6.3. *Пусть $A,B\in\mathbb{R}$ и $B\ge 0$. Предположим, что для непрерывной функции $f(t)$ на отрезке $[0,T]$ выполняется неравенство*

$$f(t)\le A+B\int_0^t f(s)\,ds.$$

Тогда $f(t)\le Ae^{Bt}$.

Доказательство. Положим

$$h(t)=A+B\int_0^t f(s)\,ds.$$

Тогда $h'(t)=Bf(t)$. Так как $B\ge 0$, то $h'(t)\le Bh(t)$. Умножаем это неравенство на e^{-Bt} и применяем правило Лейбница. Получаем $(h(t)e^{-Bt})'\le 0$. Следовательно, функция $h(t)e^{-Bt}$ не возрастает, в частности $h(t)e^{-Bt}\le A$. □

Зависимость решения от параметра.

Пусть $b(t,x,\alpha)$ – отображение из $[0,T]\times D\times U$ в $\mathbb{R}^d$, где D – открытое множество в $\mathbb{R}^d$ и U – интервал на числовой прямой. Пусть $x(t,\alpha)$ – решение задачи Коши $\dot{x}=b(t,x,\alpha)$ и $x(0,\alpha)=x_0(\alpha)$.

Теорема 6.4. *Предположим, что $b,\partial_x b$ — непрерывны на $[0,T]\times D\times U$. Более того для всех $x,y\in D$, $\alpha\in U$, $t\in[0,T]$ верна оценка*

$$|b(t,x,\alpha)-b(t,y,\alpha)|\le L|x-y|.$$

Пусть $x_0(\alpha)\in C(U)$. Тогда решение $x(t,\alpha)$ непрерывно по совокупности переменных.

Доказательство. Зафиксируем $\gamma \in U$. Пусть $I \subset U$ — отрезок, содержащий γ. Имеет место равенство:

$$x(t,\alpha) - x(t,\gamma) = x_0(\alpha) - x_0(\gamma) + \int_0^t \Big[b(s,x(s,\alpha),\alpha) - b(s,x(s,\gamma),\alpha)\Big]\,ds + \\ + \int_0^t \Big[b(s,x(s,\gamma),\alpha) - b(s,x(s,\gamma),\gamma)\Big]\,ds.$$

Заметим, что множество $[0,T]\times X\times I$, где X – образ отрезка $[0,T]$ при отображении $t \mapsto x(t,\gamma)$, является компактом. Для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что при $|\alpha-\gamma| < \delta$ выполняются неравенства

$$|x_0(\alpha) - x_0(\gamma)| < \varepsilon/2, \quad \max_{s\in[0,T]} |b(s,x(s,\gamma),\alpha) - b(s,x(s,\gamma),\gamma)| < \varepsilon/2T.$$

Имеет место оценка

$$|x(t,\alpha) - x(t,\gamma)| \le \varepsilon + L\int_0^t |x(s,\alpha) - x(s,\gamma)|\,ds.$$

Применяя неравенство Гронуолла, выводим оценку

$$|x(t,\alpha) - x(t,\gamma)| \le \varepsilon e^{Lt},$$

из которой следует равномерная непрерывность $x(t,\alpha)$ по α. □

Немного более сложное утверждение — дифференцируемость решения по параметру. Пусть далее U – интервал на числовой прямой.

Теорема 6.5. *Предположим, что b имеет непрерывные и ограниченные производные по x и α в $[0,T]\times D\times U$, причем*

$$|b(t,x,\alpha) - b(t,y,\alpha)| + |\partial_x b(t,x,\alpha) - \partial_x b(t,y,\alpha)| + |\partial_\alpha b(t,x,\alpha) - \partial_\alpha b(t,y,\alpha)| \le L|x-y|.$$

Пусть также начальное условие непрерывно дифференцируемо по α. Тогда решение $x(t,\alpha)$ непрерывно дифференцируемо по α и $z = \partial_\alpha x(t,\alpha)$ удовлетворяет задаче Коши $\dot z = \partial_x b z + \partial_\alpha b$, $z(0,\alpha) = x_0'(\alpha)$.

Доказательство. Рассмотрим уравнение $\dot z = \partial_x b\, z + \partial_\alpha b$ как уравнение на неизвестную функцию z. Положим

$$y(t,\alpha) = x(t,\alpha_0) + \int_{\alpha_0}^{\alpha} z(t,u)\,du.$$

Для доказательства достаточно показать, что $y(t,\alpha) = x(t,\alpha)$. После дифференцирования по t в правой части получаем

$$b(t,x(t,\alpha_0),\alpha_0) + \int_{\alpha_0}^{\alpha} \partial_x b(t,x(t,u),u)z(t,u) + \partial_\alpha b(t,x(t,u),u)\,du.$$

Это выражение можно переписать так

$$b(t,y(t,\alpha),\alpha) + I(t,\alpha),$$

где

$$I(t,\alpha) = \int_{\alpha_0}^{\alpha} (\partial_x b(t,x(t,u),u) - \partial_x b(t,y(t,u),u))z(t,u) + (\partial_\alpha b(t,x(t,u),u) - \partial_\alpha b(t,y(t,u),u))\,du.$$

Пусть $\alpha_1 > \alpha_0$ и $M = \sup_{[0,T]\times[\alpha_0,\alpha_1]} |z(t,u)|$. Тогда

$$|I| \le L(M+1) \int_{\alpha_0}^{\alpha} |x(t,u) - y(t,u)|\, du$$

Напомним, что $\dot{y} = b(t, y(t,\alpha), \alpha) + I(t,\alpha)$, $y(0,\alpha) = x_0(\alpha)$. Вычитаем из уравнения для y уравнение $\dot{x} = b(t, x(t,\alpha), \alpha)$ и интегрируем по t. Получаем равенство

$$y(t,\alpha) - x(t,\alpha) = \int_0^t (b(s, y(s,\alpha) - b(s, x(s,\alpha))\, ds + \int_0^t I(s,\alpha)\, ds,$$

из которого следует оценка

$$|y(t,\alpha) - x(t,\alpha)| \le L \int_0^t |y(s,\alpha) - x(s,\alpha)|\, ds + L(M+1) \int_0^t \int_{\alpha_0}^{\alpha} |x(s,u) - y(s,u)|\, du\, ds$$

Пусть $\alpha_0 < \gamma < \alpha_1$. Проинтегрируем последнюю оценку по α от α_0 до γ, предварительно заменив в последнем интеграле верхний предел на γ. Получаем

$$\int_{\alpha_0}^{\gamma} |y(t,u) - x(t,u)|\, du \le C \int_0^t \Big(\int_{\alpha_0}^{\gamma} |y(s,u) - x(s,u)|\, du \Big)\, ds, \quad C = L + L(M+1)(\alpha_1 - \alpha_0).$$

По неравенству Гронуолла

$$\int_{\alpha_0}^{\gamma} |y(t,u) - x(t,u)|\, du = 0$$

и, следовательно, $y(t,\alpha) = x(t,\alpha)$. □

Уравнение $\dot{z} = \partial_x b\, z + \partial_\alpha b$ называется *уравнением в вариациях.*

Если начальное условие зависит от параметра, а b не зависит, то уравнение в вариациях имеет особенно простой вид: $\dot{z} = \partial_x b\, z$.

Уравнения, содержащие производные высокого порядка.

Рассмотрим уравнение $y^{(n)} = f(y^{n-1}, \dots, y, t)$, где функция f определена на некоторой области $D \times (\alpha, \beta)$, где $D \subset \mathbb{R}^n$. Решением называется n раз дифференцируемая функция y на интервале (α, β) такая, что подстановка y в уравнение обращает его в верное равенство для всех $t \in (\alpha, \beta)$.

Оказывается вместо уравнения, содержащего производные высокого порядка, можно рассматривать систему уравнений первого порядка.

Канонический изоморфизм

Положим $x_1 = y$, $x_2 = y'$, …, $x_n = y^{n-1}$. Тогда x_i – дифференцируемые функции на (α, β), удовлетворяющие следующей системе уравнений:

$$\dot{x}_1 = x_2, \dots, \dot{x}_{n-1} = x_n, \dot{x}_n = f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, t).$$

Легко проверить, что если функции x_i удовлетворяют этой системе, то функция $y = x_1$ удовлетворяет исходному уравнению.

Канонический изоморфизм подсказывает правильную постановку задачи Коши, а именно к уравнению надо добавить начальные условия: $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y_1$, …, $y^{n-1}(t_0) = y_{n-1}$.

Теперь можно переформулировать теорему существования и единственности для уравнения, содержащего производные высокого порядка.

Более трудный случай, когда уравнение не разрешено относительно старшей производной: $F(y^n,\dots,y,t)=0$. По теореме о неявной функции если $\frac{\partial F}{\partial y^n}\neq 0$, то локально можно выразить y^n через $y^{n-1},\dots,y,t$.

7. Фазовый поток. Теорема Лиувилля. Выпрямление векторного поля.

Фазовый поток и векторные поля

Пусть b – гладкое векторное поле на $\mathbb{R}^d$, имеющее ограниченные производные любого порядка. Для каждой точки y выпускаем решение $x(t,y)$ задачи Коши $\dot{x}=b(x)$, $x(0,y)=y$. Фиксируем t. Получаем отображение $g^t\colon y\mapsto x(t,y)$.

Согласно доказанному выше функция $(t,y)\mapsto g^t(y)$ является непрерывно дифференцируемой.

Предложение 7.1. $\{g^t\}_{t\in\mathbb{R}}$ – *однопараметрическая группа диффеоморфизмов.*

Доказательство. Проверим, что $g^t\circ g^s=g^{t+s}$. Действительно, $x(t)=g^{t+s}(y)$ удовлетворяет уравнению $\dot{x}=b(x)$ и $x(0)=g^s(y)$, но такое решение единственно и равно $g^t(g^s(y))$. Так как для каждого g^t отображение g^{-t} – обратное отображение и оно гладкое, то g^t является диффеоморфизмом. □

Группу $\{g^t\}$ называют *фазовым потоком* или *динамической системой* или однопараметрической группой преобразований, порождаемой векторным полем b.

Теорема Лиувилля и теорема Пуанкаре

Лемма 7.1. *Пусть g^t – фазовый поток, порожденный полем b. Обозначим через $J_t(y)$ определитель матрицы Якоби отображения $y\to g^t(y)$. Имеет место равенство*
$$\frac{d}{dt}J_t(y)=J_t(y)\mathrm{div}b(g^t(y)).$$

Доказательство. Пусть $f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Заметим, что
$$\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\,dx=\int_{\mathbb{R}^n}f(g^t(y))J_t(y)\,dy.$$
Продифференцируем это равенство по t. Имеем
$$0=\int_{\mathbb{R}^n}\langle\nabla f(g^t(y)),b(g^t(y))\rangle J_t(y)\,dy+\int_{\mathbb{R}^n}f(g^t(y))\frac{d}{dt}J_t(y)\,dy.$$
Первый интеграл заменой переменных и интегрированием по частям приводится к виду:
$$-\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\mathrm{div}b(x)\,dx=-\int_{\mathbb{R}^n}f(g^t(y))\mathrm{div}b(g^t(y))J_t(y)\,dy.$$
Следовательно, имеет место равенство
$$\int_{\mathbb{R}^n}f(g^t(y))\mathrm{div}b(g^t(y))J_t(y)\,dy=\int_{\mathbb{R}^n}f(g^t(y))\frac{d}{dt}J_t(y)\,dy.$$
В силу произвольности f приходим к требуемому утверждению. □

Теорема 7.1. (Лиувилль) *Пусть D – измеримое по Жордану множество. Тогда*
$$\frac{d}{dt}g^t(D)=\int_{g^t(D)}\mathrm{div}b(x)\,dx.$$

Доказательство. Применяем лемму:
$$\frac{d}{dt}g^t(D) = \frac{d}{dt}\int_D J_t(y)\,dy = \int_D \mathrm{div} b(g^t(y))J_t(y)\,dy = \int_{g^t(D)} \mathrm{div} b(x)\,dx.$$
□

Простым следствием теоремы Лиувилля является наблюдение, что если $\mathrm{div} b = 0$, то фазовый поток сохраняет фазовый объем. Так происходит в гамильтоновых системах: $\dot{p} = -\partial_q H(p,q)$, $\dot{q} = \partial_p H(p,q)$.

К фазовым потокам, которые сохраняют объем применима теорема Пуанкаре.

Теорема 7.2. *Пусть D – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ и T – диффеоморфизм $D \to D$ сохраняющий объем. Тогда для всякого измеримого множества $A \subset D$ почти все точки A возвращаются при действии отображения T обратно в A, т. е. для почти каждой точки $x \in A$ найдется такой номер n, что $T^n x \in A$.*

Доказательство. Пусть B – множество таких точек из A, что $T^n x \notin A$ для всякого натурального n. Тогда $T^n B \bigcap T^m B = \emptyset$ при $n \neq m$. Множества $T^n B$ попарно не пересекаются, имеют одинаковый объем и лежат в D. Следовательно, объем B равен нулю. □

Рассмотрим пример: $\ddot{x} + U'(x) = 0$, где $U(x)$ стремится в плюс бесконечность при $|x| \to \infty$. Соответствующая система имеет вид $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -U'(x)$. Так как у векторного поля дивергенция равна нулю, то фазовый поток сохраняет объем. Для решений выполняется закон сохранения
$$\frac{\dot{x}^2}{2} + U(x) = const.$$
Отсюда сразу следует, что фазовый поток сохраняет ограниченную область
$$D = \{(x,y)\colon \frac{y^2}{2} + U(x) \le C\}.$$
Из теоремы Пуанкаре выводим, что решение обязательно вернется сколь угодно близко к начальному положению.

Выпрямление векторного поля

Используя фазовый поток можно выпрямить векторное поле в окрестности неособой точки x_0 (т. е. $b(x_0) \neq 0$).

Цель: в малой окрестности x_0 указать диффеоморфизм, который поле b преобразует постоянное поле $e_1 = (1, 0, \ldots, 0, 0)$. Для нового поля соответствующие фазовые кривые – прямые $x(t) = x + te_1$. Значит искомая замена координат переводит фазовые кривые $x(t)$ в прямые. Теперь становится понятно как вводить новые координаты: последние $(d-1)$ координат параметризует интегральные кривые, а первая координата – координата вдоль фазовой кривой (например время). Далее для упрощения предположим, что $x_0 = 0$ и $b^1(x_0) \neq 0$. Пусть $\Pi = \{x_1 = 0\}$. В малой (насколько малой обсудим позже) окрестности точки 0 из каждой точки $(0,\xi) \in \Pi$ выпускаем фазовую кривую $x(t,\xi)$. Таким образом получаем отображение Ψ, сопоставляющее паре $(t,\xi) \in \mathbb{R}^d$ значение $x(t,\xi)$. Мы покажем, что всякая точка из достаточно малой окрестности x_0 однозначно задается координатами (t,ξ), т. е фазовой кривой, проходящей через эту точку, и положением точки на самой фазовой кривой. Непрерывная дифференцируемость отображения Ψ следует из свойств решения, доказанных выше. Так как

$$\partial_t = \frac{dx_i}{dt}\partial_{x_i} = b^i\partial_{x_i},$$

то векторное поле e_1 переходит в векторное поле b. Проверим, что определитель матрицы Якоби отображения Ψ отличен от нуля. Находим

$$\det\Big(\frac{dx_k}{dt}, \frac{\partial x_k}{\partial \xi}\Big)\Big|_{t=0} = \det\Big(b^k(0,\xi), E\Big) = b^1(0,\xi).$$

Остается заметить, что $b^1(0,\xi)\neq 0$ при ξ близком к нулю. Следовательно, для близких к нулю (t,ξ) определитель отображения Ψ отличен от нуля. По теореме о неявной функции существуют такие окрестности U и V точки 0, что отображение $\Psi\colon U\mapsto V$ является диффеоморфизмом. Соответственно, обратное отображение переводит векторное поле b в векторное поле e_1.

Таким образом, доказан следующий результат.

Теорема 7.3. (Выпрямление векторного поля) *Для всякой точки x_0, в которой $b(x_0)\neq 0$, существуют окрестности U, V и диффеоморфизм $\Psi\colon U\mapsto V$ такой, что Ψ^{-1} переводит поле b в поле e_1, а фазовые кривые в прямые $x(t) = x + te_1$.*

Конечно самое интересное происходит в окрестности особых точек.

8. Линейные системы.

Пусть $A(t)$ – матрица $d\times d$, элементы которой a^{ij} – непрерывные функции на интервале (α,β). Рассмотрим систему $\dot{x} = Ax$. Наша первая задача описать пространство решений этой системы.

Теорема 8.1. *Пространство решений E является линейным и конечномерным пространством, причем его размерность равна d.*

Доказательство. Линейность пространства E очевидна. Фиксируем $t_0\in(\alpha,\beta)$. Отображение $\varphi\colon \mathbb{R}^d\mapsto E$ задано следующим правилом: каждому вектору $x_0\in\mathbb{R}^d$ сопоставляем решение $x(t)$ задачи Коши $\dot{x} = Ax$, $x(t_0) = x_0$. Ясно, что φ – изоморфизм двух линейных пространств. □

Базис в пространстве решений E называется **фундаментальной системой решений**. Для нахождения фундаментальной системы достаточно предъявить d линейно независимых решений. Как проверить линейную независимость?

Определитель Вронского $W(t)$ – определитель матрицы, столбцы которой – вектора решений системы $\dot{x} = Ax$.

Теорема 8.2. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *Решения $x^1,\dots x^d$ – линейно зависимы.*

(ii) $W(t) = \det(x^1(t),\dots,x^d(t)) = 0$ *для всех* $t\in(\alpha,\beta)$.

(iii) $W(t_0) = 0$ *в некоторой точке* $t_0\in(\alpha,\beta)$.

Доказательство. Достаточно пояснить (iii) $\Rightarrow$ (i). Пусть $c_1, \ldots, c_d$ – ненулевой набор чисел, для которых верно равенство $c_1 x^1(t_0) + \ldots + c_d x^d(t_0) = 0$. Заметим, что $y(t) = c_1 x^1(t) + \ldots + c_d x^d(t) = 0$ является решением задачи Коши $\dot{x} = Ax$, $x(t_0) = 0$, а такое решение только одно $z(t) \equiv 0$. $\square$

Теорема 8.3. (Лиувилль—Остроградский) *Определитель Вронского удовлетворяет уравнению* $\dot{W} = \mathrm{tr}AW$ *и имеет место следующая формула:*

$$W(t) = W(t_0)\exp\Bigl(\int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}A(s)\,ds\Bigr), \quad \mathrm{tr}A = a^{11} + a^{22} + \ldots + a^{dd}.$$

Пусть $X(t)$ – матрица, столбцы которой составляют фундаментальную систему решений для $\dot{x} = Ax$, где A – постоянная матрица. Предположим, что $X(0) = E$. Тогда фазовый поток соответствующий полю Ax задается так $g^t(y) = X(t)y$. Определитель матрицы $X(t)$ – определитель Вронского и якобиан отображения $g^t(y)$. В этом случае теорема Лиувилля-Остроградского является частным случаем доказанной выше теоремы Лиувилля.

Системы с постоянной матрицей. Экспонента матрицы.

Пусть теперь A — постоянная матрица. Пространство вещественных матриц $M_{d\times d}$ является банаховым пространством с нормой

$$\|A\| = \max_{\|x\|\le 1} \|Ax\|.$$

Легко проверить, что $\|AB\| \le \|A\|\|B\|$, в частности $\|A^n\| \le \|A\|^n$.

Экспонентой матрицы A называется ряд

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!},$$

который сходится так как сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A\|^n}{n!}$.

Отметим, что вообще говоря $\exp(A+B) \ne \exp(A)\exp(B)$. Равенство имеет место для коммутирующих матриц.

Действуя по аналогии с одномерным случаем естественно ожидать, что решение задачи Коши $\dot{x} = Ax$, $x(t_0) = x_0$ задается равенством $x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0$.

Теорема 8.4. *Отображение* $x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0$ *является решением системы* $\dot{x} = Ax$.

Доказательство. Будем считать, что $t_0 = 0$. Таким образом достаточно проверить, что $e^{tA}x_0$ является решением. Заметим, что

$$h^{-1}\Bigl(e^{(t+h)A}x_0 - e^{tA}x_0\Bigr) = h^{-1}\Bigl(e^{hA} - E\Bigr)e^{tA}x_0 = \Bigl(A + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^{n+1}h^n}{(n+1)!}\Bigr)e^{tA}x_0.$$

Следовательно, имеет место цепочка неравенств:

$$\|h^{-1}\Bigl(e^{(t+h)A}x_0 - e^{tA}x_0\Bigr) - Ae^{tA}x_0\| \le \|e^{tA}x_0\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|A\|^{n+1}|h|^n}{(n+1)!} = \|e^{tA}x_0\||h|^{-1}(e^{\|A\||h|} - 1 - \|A\||h|),$$

где последнее выражение стремиться к нулю при $h \to 0$. $\square$

Как вычислять экспоненту матрицы?

Разберем несколько важных частных примеров:

(I) Диагональная матрица $A = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$. Тогда $e^{tA} = diag(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_d t})$.

(II) Матрица A, в которой над главной диагональю стоят единицы, а все остальные элементы равны нулю. Такая матрица в степени d обращается в ноль. Следовательно в сумме, задающей экспоненту, лишь конечное число слагаемых. Легко видеть, что k-я строка матрицы e^{At} имеет вид:

$$(0, 0, \dots, 0, 1, t, t^2/2, \dots t^{k-2}/(k-2)!).$$

(III) Пусть теперь матрица A равна сумме матрицы λE и матрицы B из (II). Так как матрица λE коммутирует с любой матрицей, то $e^{tA} = e^{\lambda t} e^{tB}$ и надо ответ из предыдущего случая просто умножить на $e^{\lambda t}$.

Итак, мы фактически научились вычислять экспоненту Жордановой клетки. Однако к жордановой форме матрица приводится над полем комплексных чисел. Следовательно, надо комплексифицировать систему.

Пусть $z(t) = x(t) + iy(t)$ и $Az = Ax + iAy$. Рассмотрим линейную систему $\dot{z} = Az$.

Следующие простые наблюдения позволяют связать исходную систему с комплексифицированной.

(a) Если $z(t)$ – решение, то $\bar{z}(t) = x(t) - iy(t)$ – решение.

(b) Если начальное условие вещественно, то и решение вещественно. Действительно, $z(t) - \bar{z}(t)$ – решение с нулевым начальным условием.

(c) Если z и $\bar{z}$ – решения, то $Rez = (z + \bar{z})/2$ и $Imz = (z - \bar{z})/2i$ решения исходной системы.

Из линейной алгебры известно, что существует базис в $\mathbb{C}^d$, в котором матрица A имеет Жорданову форму. В силу определения экспоненты матрицы подпространства инвариантные для A являются инвариантными для e^{tA}. В этом базисе матрица e^{tA} имеет блочный вид, в котором каждый блок соответствует некоторой жордановой клетки. Пусть дана жорданова клетка размерности k с собственным значением λ и базисными векторами $h_1, \dots h_k$. Тогда $e^{tA}h_1 = e^{\lambda t}h_1$, $e^{tA}h_2 = e^{\lambda t}(th_1 + h_2)$, $\dots e^{tA}h_k = e^{\lambda t}(\frac{t^{k-2}}{(k-2)!}h_1 + \dots + h_k)$.

Мы знаем, что решение задачи Коши задается формулой $x(t) = e^{tA}x_0$. Разложим x_0 по базису h_i. Каждая координата решения является суммой выражений вида $P_m(t)e^{\lambda_k t}$, где степень многочлена P_m не превосходит кратности собственного значения λ_k. В вещественном случае решение покоординатно запишется как сумма выражений $e^{\alpha_k t}(P_m(t)\cos(\beta_k t) + Q_m(t)\sin(\beta_k t))$, где $\alpha_k + i\beta_k = \lambda_k$ и степени P_m, Q_m не превосходят кратности корня λ_k.

Неоднородные системы уравнений.

Рассмотрим систему уравнений $\dot{x} = Ax + f$, где a^{ij}, f – непрерывные функции на интервале (α, β).

Теорема 8.5. *Пусть $\hat{x}$ – какое-то решение системы $\dot{x} = Ax + f$. Тогда множество решений неоднородной системы имеет вид $\hat{x} + E_A$, где E_A – пространство решений однородной системы.*

Таким образом, достаточно научиться находить хотя бы одно решение неоднородной системы.

Вариация постоянных

Пусть $x^1, \ldots, x^d$ – фундаментальная система решений однородной системы. Будем искать решение неоднородной системы в следующем виде:

$$x(t) = c_1(t)x^1(t) + \ldots + c_d(t)x^d(t).$$

Подставляем в уравнение:

$$\dot{x} = c_1\dot{x}^1 + \ldots + c_d\dot{x}^d + \dot{c}_1x^1 + \ldots + \dot{c}_dx^d = A(c_1x^1 + \ldots + c_dx^d) + \dot{c}_1x^1 + \ldots + \dot{c}_dx^d.$$

Следовательно, достаточно найти c_k из равенства $\dot{c}_1x^1 + \ldots + \dot{c}_dx^d = f$. Так как $x^1, \ldots, x^d$ – фундаментальная система, то определитель этой системы отличен от нуля и можно выразить $\dot{c}_k$. Интегрируя находим c_k.

9. Линейные уравнения.

Рассмотрим уравнение вида

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y = 0.$$

Используя канонический изоморфизм можно свести уравнения к системам. В частности, немедленно получаем, что пространство решений уравнения является линейным пространством размерности n. Линейно независимая система решений называется фундаментальной системой решений.

Определитель Вронского определяется так

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Теорема 9.1. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *решения $y_1, \ldots, y_n$ – линейно зависимы;*

(ii) $W \equiv 0$;

(iii) $W(x_0) = 0$ *в некоторой точке* $x_0 \in (\alpha, \beta)$.

Теорема 9.2. (Лиувилль–Остроградский) *Имеет место равенство* $W' = -a_1W$ *и, следовательно,*

$$W(x) = W(x_0)\exp\Big(-\int_{x_0}^{x} a_1(s)\,ds\Big).$$

Доказательство. Применяем канонический изоморфизм и соответствующую формулу для определителя Вронского решений линейной системы. □

Определитель Вронского можно использовать для построения линейного дифференциального уравнения, которому удовлетворяют заданные функции $g_1, \ldots, g_n$.

Уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} g_1 & g_2 & \dots & y \\ g_1' & g_2' & \dots & y' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_1^{(n)} & g_2^{(n)} & \dots & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0.$$

Действительно, раскладывая определитель по последнему столбцу получаем линейное дифференциальное уравнение. Если определитель Вронского функций g_k отличен от нуля, то это будет именно уравнение n порядка.

Пример: построим уравнение, которому удовлетворяют e^x и e^{2x}. Составляем определитель:

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & y \\ e^x & 2e^{2x} & y' \\ e^x & 4e^{2x} & y'' \end{vmatrix}.$$

Приравниваем к нулю, сокращаем на e^x и e^{2x}, раскладываем по последнему столбцу. Получаем уравнение $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

С помощью канонического изоморфизм можно из результатов о разрешимости системы вывести разрешимость и вид решения уравнения. Однако мы поступим иначе и проведем независимое рассуждение.

Положим $L(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$. Соответственно уравнение имеет вид $L(D_x)y = 0$.

Лемма 9.1.

$$L(D_x)e^{\lambda x} = L(\lambda)e^{\lambda x}.$$

Из этой леммы следует, что $e^{\lambda x}$ – решение уравнения тогда и только тогда, когда λ – корень многочлена $L(\lambda)$.

Лемма 9.2.

$$D_x^m(x^k e^{\lambda x}) = D_\lambda^k(\lambda^m e^{\lambda x}).$$

Доказательство. Действительно, выполняется цепочка равенств

$$D_x^m(x^k e^{\lambda x}) = D_x^m D_\lambda^k(e^{\lambda x}) = D_\lambda^k D_x^m(e^{\lambda x}) = D_\lambda^k(\lambda^m e^{\lambda x}).$$

□

Следствие 9.1. *Если λ_0 – корень кратности k многочлена $L(\lambda)$, то функции $e^{\lambda_0 x}$, $xe^{\lambda_0 x}$, ..., $x^{k-1}e^{\lambda_0 x}$ являются решениями уравнения $L(D_x)y = 0$.*

Доказательство. По условию $L(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k M(\lambda)$. Используя последнюю лемму, находим, что

$$L(D_x)(x^m e^{\lambda_0 x}) = D_\lambda^m(L(\lambda)e^{\lambda x})|_{\lambda=\lambda_0}.$$

Заметим, что все производные порядка не больше k от $L(\lambda)$ равны нулю при $\lambda = \lambda_0$. Применяя правило Лейбница выводим равенство $D_\lambda^m(L(\lambda)e^{\lambda x})|_{\lambda=\lambda_0} = 0$. □

Не сложно проверить, что функции $x^m e^{\lambda x}$ для разных m и λ линейно независимы.

Таким образом, доказан следующий результат.

Теорема 9.3. *Предположим, что $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ – вещественные корни многочлена $L(\lambda)$ с кратностями $n_1, \dots, n_s$ соответственно. Тогда функции*

$$e^{\lambda_k x}, \quad xe^{\lambda_k x}, \quad \dots, \quad x^{n_k-1}e^{\lambda_k x}$$

образуют фундаментальную систему решений.

Пример: $y'' - 5y' + 6y = 0$. Решаем уравнение $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$. Корни $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = 3$. Решения этого уравнения имеют вид $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$.

Если корень $\lambda = \alpha + i\beta$ комплексный, то сопряженное число $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ тоже является корнем. Два решения $x^m e^{\lambda x}$ и $x^m e^{\bar{\lambda} x}$ можно заменить на $x^m e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ и $x^m e^{\alpha x}\sin(\beta x)$.

Пример: $y'' + y = 0$. Решаем уравнение $\lambda^2 + 1 = 0$. Корни $\lambda = \pm i$. Решения этого уравнения имеют вид $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$.

Линейные неоднородные уравнения

Обсудим неоднородное уравнение $L(D_x)y = f$, где f – непрерывная функция на интервале (α, β).

Теорема 9.4. *Пусть $\hat{y}$ – решение неоднородного уравнения. Множество решений неоднородного уравнения имеет вид: $\hat{y} + E_L$, где E_L – пространство решений однородного уравнения.*

Прежде чем решать неоднородное уравнение правую часть можно упростить с помощью следующего простого наблюдения:

если $f = f_1 + f_2$ и $L(D_x)y_1 = f_1$, $L(D_x)y_2 = f_2$, то $L(D_x)(y_1 + y_2) = f$.

Существует принципиально четыре способа решения неоднородного уравнения:

(I) Угадать решение.

(II) Метод вариации постоянных.

Пусть $y_1, \dots, y_n$ – фундаментальная система решений однородного уравнения. Ищем решение неоднородного уравнения в следующем виде: $y(x) = c_1(x)y_1(x) + \dots + c_n(x)y_n(x)$, где постоянные находим из равенств $c_1' y_1^{(k)} + \dots + c_n' y_n^{(k)} = 0$ при $k < n-1$ и $c_1' y_1^{(n-1)} + \dots + c_n' y_n^{(n-1)} = f$. Определитель этой системы уравнений – определитель Вронского. Следовательно, c_k' можно выразить из этой системы. Обоснование этого метода: применяем канонический изоморфизм и сводим к методу вариации постоянных для линейных систем.

(III) Квазимногочлен в правой части.

Начнем с примера: $y'' + 3y' + 4y = e^x$. Ищем решение в виде $y = Ae^x$. Подставляя, находим $A + 3A + 4A = 1$ и $A = 1/8$.

Лемма 9.3. *Пусть λ – корень $L(\lambda) = 0$ кратности k. Тогда $L(D_x)(x^m e^{\lambda x})$ равно нулю при $m \le k-1$ и равно $(cx^{m-k} + \dots)e^{\lambda x}$, где $c \ne 0$, при $m > k-1$.*

Таким образом, если в правой части стоит выражение вида $e^{\lambda x}P_m(x)$, где P_m – многочлен степени m, а λ – корень кратности k, то искать решение можно с неопределенными коэффициентами в виде $x^k e^{\lambda x} Q_m(x)$, где Q_m – многочлен степени m.

Явление резонанса. Рассмотрим уравнение $y'' + y = \sin(2x)$. Его решение имеет вид $y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x - \sin(2x)$ и является ограниченным. Вроде бы ничего удивительного, ведь правая часть – ограниченная (вместе со всеми производными) функция. Однако, если вместо $\sin(2x)$ в правой части взять $\sin x$, то ситуация существенно поменяется. В этом случае уравнению удовлетворяет функция $\frac{1}{2}x\cos x$, которая уже не является ограниченной.

(IV) Фундаментальное решение. Предположим, что функции a_k постоянные.

Пусть u – решение задачи Коши $L(D_x)u = 0$ и $u(0) = \ldots = u^(n-2)(0) = 0$, $u^{(n)}(0) = 1$. Тогда

$$y(x) = \int_0^x f(s)u(x-s)\,ds$$

является решением неоднородного уравнения $L(D_x) = f$.

Найдем производные функции y:

$$y'(x) = f(x)u(0) + \int_0^x f(s)u'(x-s)\,ds = \int_0^x f(s)u'(x-s)\,ds, \ldots$$

$$y^n(x) = f(x)u^{n-1}(0) + \int_0^x f(s)u^{(n)}(x-s)\,ds.$$

Тогда

$$L(D_x)y(x) = f(x) + \int_0^x f(s)L(D_x)u(x-s)\,ds = f(x).$$

Литература

1. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. М.: Едиториал УРСС, 2004. — 240с.

2. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.; Ижевск: Издательство РХД, 2000. — 175с.

3. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Ижевск: Ижевская республиканская типография. 2000. —368с.

4. Арнольд В.И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва. МЦНМО. 2012.

5. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974.

6. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: УРСС, 2003. — 272с.

7. Буфетов А.И., Гончарук Н.Б., Ильяшенко Ю.С. Конспект курса «Обыкновенные дифференциальные уравнения», часть I. Механико-математический факультет МГУ, 2012.