

## Листок 1

Задача 1. Известно, что существует конечный предел  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ . Докажите, что уравнение  $xy' + ay = f(x)$  при  $a > 0$  имеет только одно ограниченное при  $x \rightarrow 0$  решение и найдите предел этого решения при  $x \rightarrow 0$ . Докажите, что при  $a < 0$  всякое решение этого уравнения имеет конечный предел при  $x \rightarrow 0$  и найдите этот предел.

Задача 2. Найдите периодическое решение уравнения  $y' = 2y \cos^2 x - \sin x$ .

Задача 3. Докажите, что уравнение  $y' = y + f(x)$  с ограниченной на  $\mathbb{R}$  функцией  $f$  имеет ровно одно ограниченное на  $\mathbb{R}$  решение. Найдите это решение. Докажите, что найденное решение периодическое, если  $f$  является периодической.

Задача 4. Докажите, что если линейное дифференциальное уравнение первого порядка с 1-периодическими коэффициентами имеет непостоянное  $\tau$ -периодическое решение, то 1 является периодом этого решения и число  $\tau$  рационально.

Задача 5. Предположим, что  $b, h \in C(\mathbb{R})$  и  $b(x) < h(x)$ . Пусть  $x(t)$  и  $y(t)$  на интервале  $(-\alpha, \alpha)$  удовлетворяют уравнениям  $\dot{x} = b(x)$  и  $\dot{y} = h(y)$ , причем  $x(0) = y(0)$ . Докажите, что  $x(t) \leq y(t)$  для всех  $t \geq 0$ .

Задача 6. Пусть  $\Phi(x)$  – гладкая функция, причем  $\Phi'' \geq 0$ . Пусть задано число  $x_0$ . Набор чисел  $x_1, x_2, \dots, x_N$  построен по следующему правилу:  $x_{k+1}$  – точка экстремума функции

$$f(x) = \frac{(x - x_k)^2}{2N^{-1}} + \Phi(x).$$

Докажите, что ломаные  $L_N$  с вершинами в точках  $(0, x_0), (N^{-1}, x_1), (2N^{-1}, x_2), \dots, (1, x_N)$  равномерно на отрезке  $[0, 1]$  приближаются к решению  $x(t)$  задачи Коши  $\dot{x} = -\Phi'(x)$ ,  $x(0) = x_0$ .

Задача 7. Четыре букашки, сидевшие в вершинах квадрата, стали двигаться друг за другом с единичной скоростью, держа курс на преследуемого. Нарисуйте траектории их движения. Какова длина каждой траектории? Каков закон движения в декартовых и полярных координатах?