Материалы к семинарам 1 - 2 по матанализу
1-я неделя (4–8.09.2017)

Задача 0.1. Объясните, почему верны тождества (1) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$; (2) $X \setminus (A_1 \cup A_2) = (X \setminus A_1) \cap (X \setminus A_2)$; (3) $X \setminus (A_1 \cap A_2) = (X \setminus A_1) \cup (X \setminus A_2)$. (Здесь $A_i \subset X$.)

Задача 0.2. Докажите, что: (1) объединение двух счётных множеств счётно;
(2) декартово произведение двух счётных множеств счётно.

Действительные числа

На лекции действительные числа будут построены конструктивно как пополнение рациональных (классы эквивалентности фундаментальных последовательностей и т.д.). Пока предполагается, что действительные числа $\mathbb{R}$ — формализация школьного понятия числовой прямой. Именно, действительные числа образуют упорядоченное поле (т. е. верны обычные свойства коммутативности, дистрибутивности и т.д. плюс свойства неравенств: неравенства $a \geq b$ и $c \geq d$ влекут $a + c \geq b + d$, а $a \geq b \geq 0$ и $c \geq d \geq 0$ — $ac \geq bd \geq 0$), в котором справедливы два следующих утверждения.
(1) Аксиома Архимеда: для любого $r \in \mathbb{R}$ существует натуральное число n, для которого $n > r$. Историческая формулировка: для любых отрезков a и b можно отложить первый из них столько раз, что получится отрезок, больший второго: $na > b$. Ясно, что при $r = b/a$ формулировки эквивалентны.
(2) Принцип вложенных отрезков: если последовательность $I_n = [a_n, b_n]$ такова, что $I_{n+1} \subset I_n$ при всех n, то существует точка x, принадлежащая каждому I_n.

Задача 0.3. Докажите, что если длины отрезков I_n становятся меньше (1) любого $\varepsilon > 0$; (2) $1/k$ для любого $k \in \mathbb{N}$, то общая точка единственна.

Двоичная запись

Бесконечная двоичная дробь $A, a_1 \ldots a_m \ldots$ обозначает число, строящееся следующим образом: рассмотрим отрезки $I_n = [A, a_1 \ldots a_n; A, a_1 \ldots a_n + 2^{-n}]$. Они вложенные и их длины стремятся к нулю. Поэтому они имеют единственную общую точку, которая и будет называться числом с двоичной записью $A, a_1 \ldots a_m \ldots$.

Задача 0.4. Докажите, что $I_{n+1} \subset I_n$.

Задача 0.5. Докажите, что длины I_n становятся меньше любого $1/k$.

Для решения задачи понадобится неравенство Бернулли:

Задача 0.6. $(1 + a)^n \geq 1 + an$, $a \geq -1$, $n \in \mathbb{N}$.

Простейшее доказательство - по индукции.

Задача 0.7.* Каждое действительное число имеет (хотя бы одну) двоичную запись.

Задача 0.8.* Числа, выражающиеся двоично-рациональными дробями ($p/2^n$), и только они, имеют две двоичных записи. Все остальные числа имеют единственную двоичную запись.

Чтобы гарантировать единственность, обычно запрещают двоичные записи с хвостом единиц (хотя это не всегда удобно, см. напр. задачу 0.15). Дальше предлагается обсудить двоичную запись рационального числа.

Задача 0.9. Докажите, что двоичную запись рационального числа p/q ($0 < p < q$) можно получать алгоритмом «деления в столбик».

Указание: проверяем по индукции, что после «сноса» n нулей в делимом верно неравенство

$$0{,}a_1 \dots a_n \le p/q \le 0{,}a_1 \dots a_n + 2^{-n}.$$

Более того, если r_n — это остаток в последней строке после сноса n нулей, то

$$\frac{p}{q} = 0{,}a_1 \dots a_n + \frac{r_n}{2^{-n}q}$$

Задача 0.10. Всякое рациональное число имеет предпериодическую двоичную запись, то есть запись вида

$$A{,}a_1 \dots a_m b_1 \dots b_r b_1 \dots b_r b_1 \dots b_r \dots .$$

Следует из того, что a_{n+1} и r_{n+1} определяются однозначно по r_n, а возможных значений r_n лишь конечное число: $\{0, \dots, q-1\}$.

Задача 0.11. Пусть $0{,}a_1a_2 \dots = x$. Найдите, каким числам соответствуют двоичные записи
(1) $a_1, a_2a_3 \dots,$ (2) $a_1a_2 \dots a_r{,}a_{r+1}a_{r+2} \dots,$ (3) $0{,}a_{r+1}a_{r+2} \dots .$

Задача 0.12. Используя соображения из предыдущей задачи, найдите, каким числам соответствуют двоичные записи
(1) $0,(10) = 0{,}1010101010 \dots,$ (2) $0,10(101) = 0{,}10101101101101101 \dots,$
(3) $0,(b_1 \dots b_r),$ (4) $A, a_1 \dots a_m(b_1 \dots b_r).$

Итак, мы доказали, что рациональные числа и только они имеют периодическую двоичную запись.

Канторово множество

Задача 0.13. Докажите, что канторово множество содержит точки, отличные от концов отрезка (в частности, точку $1/4$).

Задача 0.14. Рассмотрим отображение F, которое каждой точке x канторова множества ставит в соответствие последовательность из цифр 0 и 1: $F(x) = a_1a_2 \dots$; $a_n = 0$, если отрезок n-го ранга, которому принадлежит x, является левой третью некоторого отрезка $n-1$-го ранга, и $a_n = 1$, если правой третью. Докажите, что F взаимно однозначно отображает C на множество $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ всех последовательностей из нулей и единиц.

Задача 0.15. (д/з) Докажите, что если в условиях предыдущей задачи, $b_n = 2a_n$ то $0{,}b_1b_2 \dots {}_3 = x$ (здесь $0{,}b_1b_2 \dots {}_3$ — троичная запись числа, определяемая аналогично вышеизложенной двоичной).

Задача 0.16*. (д/з) Постройте биекцию между C и $[0,1]$.

Задача 0.17. Найдите общую длину l_n отрезков ранга n. Докажите, что она стремится к нулю.

Последовательности, стремящиеся к нулю

Дайте определение последовательности, стремящейся к нулю. Напомните, что мы уже доказали, что $1/n \to 0$ и что $1/2^n \to 0$.

Задача 0.18. $q^n \to 0$ при $|q| < 1$.

Решив эту задачу, мы получим, что суммарная длина $l_n = (2/3)^n$ отрезков ранга n, покрывающих канторово множество, стремится к нулю.

Задача 0.19*. Докажите, что если $a > 1$, $k \in \mathbb{N}$, то $(1+\varepsilon)^k < a$ при некотором $\varepsilon > 0$.

В этой задаче нельзя пользоваться существованием корня k-й степени, поскольку оно еще не доказано.

Задача 0.20. Докажите, что $n^k/a^n \to 0$ $(a > 1,\ k \in \mathbb{N})$.

Задача 0.21. (д/з) Докажите, что $a^n/n! \to 0$.