Лекция 2.

1 Тест.

2 Рациональные числа.

На наивном уровне, рациональное число - это дробь $\frac{p}{q}$, где q - натуральное, а p - целое. Однако не верно, что разные дроби - это разные числа. Например, $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$.

Определение 1 *Две дроби* $\frac{p_1}{q_1}$ *и* $\frac{p_2}{q_2}$ *эквивалентны (или равны), если*

$$p_1 q_2 = p_2 q_1. \tag{1}$$

eqn:eq

Рациональное число - это класс эквивалентных дробей. Целые числа становятся рациональными, если положить $n = \frac{n}{1}$.

Замечание 1 *Если* p *делится на* $q : p = qd$, *то* $\frac{p}{q} = d$, *точнее,* $\frac{p}{q} = \frac{d}{1}$ *в смысле соотношения* (1).

Это определение становится содержательным, если сказать, что можно делать с рациональными числами, в частности определить сложение и умножение.

Определение 2

$$\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 q_2 + q_1 p_2}{q_1 q_2}, \quad \frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 p_2}{q_1 q_2}$$

Важное замечание 1 *Рациональное число - это не одна дробь, а целый класс эквивалентных дробей. Нужно доказать что если каждую из дробей-слагаемых заменить на эквивалентную, то и сумма заменится на эквивалентную дробь.*

Для доказательства достаточно заменить на эквивалентную только одну дробь; мы меняем слагаемые по очереди. Итак, пусть $\frac{p}{q}$ эквивалентно $\frac{p_1}{q_1}$. Тогда

$$\frac{pq_2 + qp_2}{qq_2} \approx \frac{p_1 q_2 + q_1 p_2}{q_1 q_2}$$

Равенство $(pq_2 + qp_2)q_1 q_2 = (p_1 q_2 + q_1 p_2)qq_2$ очевидно: $pq_2 q_1 + qp_2 q_1 = p_1 q q_2 + q_1 p_2 q \Leftrightarrow pq_2 q_1 = p_1 q_2 q \Leftrightarrow pq_1 = p_1 q$.

Это доказывает корректность определения сложения рациональных чисел. Корректность умножения доказывается аналогично.

3 Отношение эквивалентности.

Обсуждая определение рациональных чисел, мы столкнулись с простейшим *отношением эквивалентности.* Это - частный случай общего понятия, которое мы сейчас определим.

Определение 3 *Отношение эквивалентности между элементами множества X - это отношение между некоторыми парами: $a \sim b$ (читается: "a эквивалентно b"), которое обладает следующими свойствами:*

- *рефлексивность: $a \sim a$;*
- *симметрия: если $a \sim b$, то $b \sim a$;*
- *транзитивность: если $a \sim b$, $b \sim c$, то $a \sim c$.*

prop:eq **Предложение 1** *Если на множестве X введено отношение эквивалентности, то оно разбивается на дизъюнктные подмножества, называемые* классами эквивалентности *так, что любые два элемента из одного класса эквивалентны, а из разных неэквивалентны.*

Доказательство Для каждого элемента $a \in X$ обозначим через C_a множество всех элементов X, эквивалентных a. Пусть два класса C_a и C_b имеют непустое пересечение: $C_a \cap C_b \ni c$. Докажем, что тогда классы C_a и C_b совпадают. Действительно, если $a \sim c$ и $b \sim c$, значит $a \sim b$ по транзитивности. Если теперь $d \in C_a$, то $d \sim a$; значит, $d \sim b$ по транзитивности. Следовательно, $C_a \subset C_b$. Аналогично, $C_b \subset C_a$. Значит,$C_b = C_a$. $\square$

В дальнейшем мы будем производить операции с классами эквивалентности. Для этого из классов будут выбираться произвольные элементы (представители), и операции будут определяться над ними. Чтобы определение было корректно, нужно доказать, что класс эквивалентности полученного в результате операции элемента не зависит от выбора представителей.

4 Последовательности и пределы

Определение 4 *Последовательность элементов множества - это отображение $\mathbb{N} \to X$; образ числа n обозначается a_n или x_n и т.д., а вся последовательность обозначается (a_n) или (x_n) и т.д.*

Элементы a_n называются *членами последовательности.*

Замечание 2 *Множество членов последовательности не обязательно счетно; оно может состоять даже из одного элемента; такие последовательности называются* стационарными.

def:lim **Определение 5** *Последовательность рациональных чисел имеет предел* 0 *(или стремится к нулю), если для любого m существует такое N, что для любого $n > N$ выполнено неравенство:*

$$|a_n| < \frac{1}{m}. \qquad (2)$$ eqn:lim

На языке кванторов:

$$\forall\, m \;\exists\, N : \forall\, n > N \;\; |a_n| < \frac{1}{m}.$$

Пример 1 *Последовательность $a_n = \frac{1}{n}$ стремится к нулю. Для каждого m можно взять $N = m$.*

Важный пример 1 *Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия: $a_n = q^n,\ |q| < 1$. То, что она стремится к нулю, будет доказано на занятиях.*

Определение 6 *Последовательность (a_n) имеет предел a: $a_n \to a$, если $a_n - a \to 0$. Говорят, что (a_n) сходится к a.*

5 Фундаментальные последовательности.

Вопрос: как, не зная предела a, установить, что последовательность (a_n) сходится? Другими словами, как, находясь внутри последовательности, определить, что она сходится? Этой цели служит понятие фундаментальной последовательности.

Определение 7 *Последовательность рациональных чисел называется* фундаментальной (или последовательностью Коши)*, если для любого натурального m существует такое N, что для любых $k, l > N$ выполнено неравенство*

$$|a_k - a_l| < \frac{1}{m}.$$

Задача 1 *Если последовательность стремится к нулю, то она фундаментальна.*

Задача 2 *Если последовательность стремится к рациональному пределу, то она фундаментальна.*

Обратное неверно: фундаментальная последовательность может не иметь рационального предела.

Пример 2 *Возьмем последовательность $a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots$ определяемую так:*

$$a_0 = 1,\ \ a_k = \begin{cases} a_{k-1} + \frac{1}{2^k},\ \ \text{если } (a_{k-1} + \frac{1}{2^k})^2 < 2 \\ a_{k-1},\ \ \text{если } (a_{k-1} + \frac{1}{2^k})^2 > 2. \end{cases}$$

Почему не рассмотрен случай равенства?

6 Действительные числа.

Определение 8 *Две фундаментальные последовательности эквивалентны, если их разность стремится к нулю.*

prop:tran **Предложение 2** *Это определение задает отношение эквивалентности.*

Доказательство Рефлексивность и симметрия очевидны. Докажем транзитивность: пусть $(x_n) \sim (y_n),\ (y_n) \sim (z_n)$. Тогда $(x_n) \sim (z_n)$.

prop:sum **Предложение 3** *Если две последовательности стремятся к нулю, то и их сумма стремится к нулю.*

Предложение 2 следует из предложения 3. Действительно, $x_n - z_n = (x_n - y_n) + (y_n - z_n)$. По условию, $x_n - y_n \to 0,\ y_n - z_n \to 0$. По предложению 3, $x_n - z_n \to 0$. Значит, $x_n \sim z_n$. □

Доказательство [предложения 3]. Пусть $x_n \to 0,\ y_n \to 0$. Возьмем произвольное m и такие N_1 и N_2, что $\forall\ n > N_1,\ |x_n| < \frac{1}{m},\ \forall\ n > N_2,\ |y_n| < \frac{1}{m}$. Возьмем $N = \max(N_1, N_2)$. Тогда $\forall\ n > N$,

$$|x_n + y_n| < \frac{2}{m}.$$

Это доказывает предложение.

Действительно, неравенство (2) можно заменить на более слабое:

$$|a_n| < \frac{C}{m}, \tag{3}$$ eqn:lim1

где C не зависит от m и n. Если выполнено определение 2 с неравенством (3) вместо (2), то оно выполнено и с неравенством (2). Действительно, возьмем m и $m_1 > Cm$. Предположим, что мы доказали неравенство (3) с m, замененным на m_1. Тогда из этого неравенства следует (2).

□

В дальнейшем мы часто будем доказывать (3) вместо (2).