Темы курсовых работ

Нетай Игорь Витальевич

1 Системы Штейнера и группы Матьё

1–2 курс

Планируется определить системы Штейнера, построить некоторые серии из них, а также некоторые исключительные системы. Для некоторых нужно доказать единственность, также возможно доказать, что не для всех наборов параметров системы единственны (в этом случае требуется построение явных примеров).

В качестве групп автоморфизмов некоторых исключительных систем Штейнера возникают спорадические простые группы Матьё M_{11}, …, M_{24}. Предлагается доказать, что построенные группы просты.

2 Малые изоморфизмы простых групп

1–2 курс

Конечные простые группы делятся на некоторые бесконечные серии (такие, как $\mathfrak{A}_n$ $(n \geqslant 5)$, $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{F}_q)$, $G_2(\mathbb{F}_q)$ и многие другие). Между некоторыми сериями для малых размерностей существуют изоморфизмы входящих в них групп, как, например,

$$\mathfrak{A}_5 \simeq \mathrm{PSL}(2, \mathbb{F}_4) \simeq \mathrm{PSL}(2, \mathbb{F}_5), \quad \mathrm{PSL}(2, \mathbb{F}_7) \simeq \mathrm{PSL}(3, \mathbb{F}_2),$$
$$\mathfrak{A}_6 \simeq \mathrm{PSL}(2, \mathbb{F}_9), \quad \mathfrak{A}_8 \simeq \mathrm{PSL}(4, \mathbb{F}_2),$$
$$\mathrm{PSL}(3, \mathbb{F}_4) \simeq M_{21}, \quad \mathrm{U}(4, \mathbb{F}_2) \simeq \mathrm{PSp}(4, \mathbb{F}_3).$$

В работе предлагается построить часть этих изоморфизмов, построив входящие в них группы и доказав, что они простые.

3 Трёхмерный поризм Понселе

1–2 курс

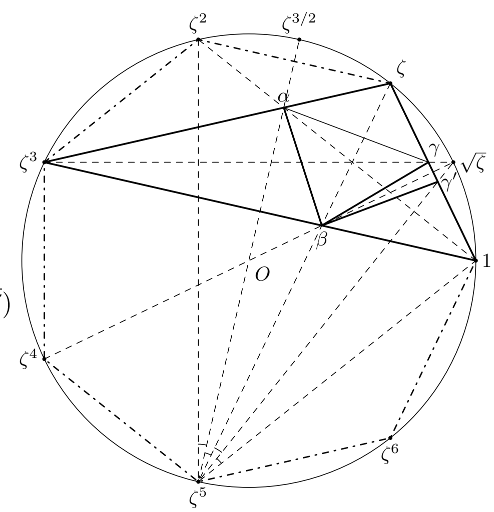
Предлагается изложить доказательство трёхмерного аналога плоского поризма Понселе. Также желательно привести явные примеры конечных случаев и научиться выполнять соответствующие иллюстрации.

4 Треугольники Шарыгина и эллиптические кривые

1–2 курс

Известна следующая школьная планиметрическая задача. Если треугольник равнобедренный, то основания его биссектрис образуют равнобедренный треугольник. Верно ли обратное? Разумеется, ответ отрицательный. Более интересная задача — поиск контрпримеров.

Простейший пример получается из правильного семиугольника (см. картинку).



Интересна задача классификации целочисленных треугольников Шарыгина.

В работе предлагается изучить классификацию целочисленных треугольников Шарыгина, далее по аналогии изучить треугольники в кольце целых, например, поля $\mathbb{Q}(\sqrt{17})$ (это расширение здесь возникает естественно и частично изучено). Также интересно было бы получить ответ на вопрос о треугольниках Шарыгина с вершинами в вершинах правильных многоугольников (по существу приведённый пример единственный известный).

Также при желании вопрос можно продолжать в том или ином виде на сферу или плоскость Лобачевского.

5 Контрпример Нагаты

1–2 курс

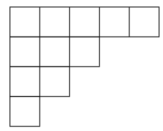
Четырнадцатая проблема Гильберта состоит в конечной порождённости алгебры инвариантов действия алгебраической группы на векторном пространстве. Оказывается, что ответ отрицательный: алгебра инвариантов не всегда конечно порождена. Предлагается изложить контрпример Нагаты или его упрощение Стейнбергом.

6 Правило Литтлвуда–Ричардсона

1–2 курс

Осторожно, программирование!

Диаграммы Юнга соответствуют неупорядоченным разбиениям неотрицательных чисел на положительные слагаемые. Они изображаются картинками такого вида:



Они соответствуют неприводимым представлениям групп GL.

Ими можно свободно породить абелеву группу. Тогда прямая сумма представлений соответствует сложению в группе. Более интересно, что тензорное умножение задаёт на этой группе структуру кольца.

Сформулировать перемножение пары диаграмм можно комбинаторно в терминах диаграмм. Предлагается сформулировать и доказать это правило, а также реализовать функцию умножения на языке программирования `Haskell`.

7 Лемма Холла и паросочетания в двудольных графах

1–2 курс
Осторожно, программирование!

Лемма 7.1. *Пусть есть множество E и набор его подмножеств $E_1, \dots, E_n$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

- *существует набор различных элементов $x_1, \dots, x_n \in E$, для которых $x_i \in E_i$;*
- *для любого поднабора множеств $m_1, \dots, m_k \in \{1, \dots, n\}$ пересечение*

$$\bigcap_{i \in \{m_1, \dots, m_k\}} E_i$$

  состоит из не менее чем k элементов.

Часто эта лемма формулируется в несколько другом виде:

Лемма 7.2. *Пусть есть двудольный граф с долями V_1 и V_2 (то есть нет рёбер внутри долей). Следующие два условия равносильны:*

- *существует вложение $f\colon V_1 \to V_2$, такое что вершины v_1 и $f(v_1)$ соединены ребром;*
- *для любого набора вершин $v_1, \dots, v_k \in V_1$ с этими вершинами соединено хотя бы k вершин в доле V_2.*

Паросочетанием в графе называется набор пар вершин, где каждая пара соединена ребром и никакие две пары не имеют общих вершин.

В частности, лемма Холла является условием существования паросочетания достаточного размера в двудольном графе. Как видно, проверка условия леммы содержит экспоненциально сложное условие, которое на практике использовать невозможно.

Однако существует полиномиальный алгоритм, который работает за $O(n^3)$ (где n — число вершин в множестве E) ищет максимальное паросочетание. Заметим, что данный алгоритм ищет максимальное паросочетание в двудольном графе и в том случае, когда условие леммы Холла не выполнено.

Предлагается доказать лемму и реализовать алгоритм на языке `Haskell`, доказать его сложность, доказать оптимальность.

Лемма допускает, например, такое обобщение: с каждой вершиной v_i нужно связать не одну, а m_i вершин другой доли. В этом случае предлагается также привести соответствующие доказательства и реализовать алгоритм на `Haskell`, а также провести оценку сложности.