

Домашнее задание № 1

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Дата сдачи задания: 17.10.2017

Рекомендация. В задачнике А.Ф. Филиппова “Сборник задач по дифференциальным уравнениям” имеется краткое изложение основных методов интегрирования предложенных ниже задач. Теория и полезные приемы представлены в начале каждого тематического раздела задачника.

1. Вертикальный цилиндрический сосуд заполнен водой до высоты H . Площадь горизонтального сечения сосуда S . В некоторый момент на дне сосуда открывается небольшое отверстие, площадь которого меняется со временем по закону

$$\sigma(t) = \sigma e^{-t/T_0},$$

где t — время, прошедшее с момента открытия отверстия, σ и T_0 — заданные параметры. Найдите все значения параметра T_0 , при которых вода успеет вытечь из сосуда до полного закрытия отверстия.

2. Гладкая кривая расположена в первом квадранте ($x \geq 0, y \geq 0$) вещественной плоскости \mathbb{R}^2 и обладает следующим свойством. Проведем из произвольной точки M кривой две прямые, перпендикулярные осям координат, и рассмотрим прямоугольник с вершинами в начале координат, в выбранной точке M , и в точках пересечения упомянутых прямых с осями координат. Тогда кривая делит этот прямоугольник на две части, площади которых относятся как $1 : \alpha$, где α — заданное положительное число. Составьте дифференциальное уравнение этой кривой и решите его для случая, когда кривая содержит точку $M_0(1, 2)$.

3. Найдите кривые на плоскости \mathbb{R}^2 , для которых отрезок, отсекаемый на оси ординат нормалью, проведенной в какой-нибудь точке кривой, равен расстоянию от этой точки до начала координат.

Найдите общее решение дифференциальных уравнений

4. $y^2 = y \frac{dy}{dx} e^x + 1$

5. $\frac{dy}{dx} \operatorname{ctg} x + y = 1$

6. $\frac{dy}{dx} - xy^2 = 2xy$

7. $\frac{dy}{dx} = \sin 2(x + y) - 1$

8. $\frac{dy}{dx} = \frac{y + x}{y - x}$

9. $x dy - y dx = \sqrt{x^2 + y^2} dx$

10. $x \frac{dy}{dx} - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}$

11. $\frac{dy}{dx} + y = e^{-x}$

12. $\frac{ds}{dt} \cos t + s \sin t = 1$

13. $\frac{ds}{dt} + s \cos t = \frac{1}{2} \sin 2t$

14. $\left(x \frac{dy}{dx} - 1\right) \ln x = 2y$

15. $\frac{dy}{dx} + xy = x^3 y^3$

16. $x \frac{dy}{dx} - y = x^2 \sqrt{y}$

Найдите значения вещественного параметра α , при котором уравнение становится уравнением в полных дифференциалах и решите его для этих значений α

17. $(x^2 + y^\alpha) dx + (\alpha x - 2y) dy = 0$

18. $\frac{y}{x} dx + (y^3 + \alpha \ln x) dy = 0$

19. $\left(\cos^2 x - (x + y) \sin \frac{x}{\alpha}\right) dx + 2(\alpha - 1) \sin^2 x dy = 0$

20. $\left(\frac{1}{x} - \frac{y^\alpha}{(x - y)^2}\right) dx - \left(\frac{1}{y} - \frac{x^\alpha}{(x - y)^2}\right) dy = 0$

Найдите интегрирующий множитель и решите уравнения в дифференциалах

21. $\left(1 + \frac{3y^2}{x^2}\right) dx = \frac{2y}{x} dy$

22. $\left(2x + \frac{y}{x^2}\right) dx + \left(x^2 - \frac{y + 1}{x}\right) dy = 0$

23. $\ln y dx - \frac{x}{y} dy = 0$