Введение в топологию (Гладкие многообразия). Листок 1.

(Вещественным) многообразием Грассманна $\mathrm{Gr}(k, n)$ называется множество, состоящее из всех k-мерных подпространств n-мерного (вещественного) векторного пространства. Часть этого задач этого листочка посвящена описанию гладкой стуктуры на $\mathrm{Gr}(k, n)$, то есть тому, что $\mathrm{Gr}(k, n)$ есть в самом деле многообразие.

Для подмножества $I \subset \{1, ..., n\}$ обозначим через $|I|$ число его элементов, а через $\bar{I}$ множество $\{1, ..., n\} \setminus I$. Зафиксируем базис $\{e_1, ..., e_n\}$ в $\mathbb{R}^n$. Через B_I обозначим упорядоченное по возрастанию индексов множество векторов $e_i, i \in I$, через L_I будем обозначать линейную оболочку множества B_I.

Рассмотрим пространство матриц $M(k, n-k)$ размера $k \times (n-k)$. Будем отождествлять его с $\mathbb{R}^{k(n-k)}$. Для каждого подмножества I определим отображение $\psi_I \colon M(k, n-k) \to \mathrm{Gr(k, n)}$ следующим образом: для матрицы $M \in M(k, n-k)$ рассмотрим линейное отображение $L_I \to L_{\bar{I}}$, матрица которого (в базисах B_I, $B_{\bar{I}}$) совпадает с M. График этого отображения есть векторное подпространство в $\mathbb{R}^n = L_I \oplus L_{\bar{I}}$, которое мы и положим равным $\psi_I(M)$. Образ отображения ψ_I обозначим через U_I.

Задача 1. Докажите, что k-мерное подпространство $L \subset \mathbb{R}^n$ лежит в U_I, если и только если его проекция на L_I вдоль $L_{\bar{I}}$ есть изоморфизм.

Задача 2. Докажите, что ψ_I есть инъекция.

Через φ_I обозначим отображение $U_I \to M(k, n-k)$, обратное отображению ψ_I.

Задача 3. Докажите, что набор (U_I, φ_I), где I пробегает все k-элементные подмножества множества $\{1, ..., n\}$, является атласом на $\mathrm{Gr}(k, n)$.

Задача 4. Докажите, что атласы, построенные по разным базисам $\{e_i\}$, являются эквивалентными.

Задача 5. Докажите, что $\mathrm{Gr}(k, n)$ а) связно; б) компактно.

Задача 6. Докажите, что $\mathrm{Gr}(k, n)$ диффеоморфно $\mathrm{Gr}(n-k, n)$.

Задача 7. Пусть $M^k \subset \mathbb{R}^n$ – k-мерное подмногообразие. Рассмотрим отображение $M^k \to \mathrm{Gr}(k, n)$, отождествляющее касательное пространство в точке многообразия M^k с параллельным ему подпространством пространства $\mathbb{R}^n$. Докажите, что это отображение является гладким.

В следующих двух задачах мы определяем и немного обсуждаем раздутие многообразий.

Задача 8. В произведении $\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ рассмотрим подмножество, состоящее из всех пар (l, x), таких что x - ненулевой вектор и $x \in l$. Покажите, предъявив атлас, что на замыкании этого подмножества есть естественная структура многообразия. Это многообразие называется раздутием $\mathbb{R}^{n+1}$ в нуле. Обозначим это многообразие $\sigma_0(\mathbb{R}^{n+1})$.

Задача 9. Определите (с помощью какой-нибудь карты) раздутие произвольного многообразия M в точке $a \in M$ (обозначим его $\sigma_a(M)$) и покажите, что ваше определение корректно. Какому многообразию диффеоморфно раздутие двумерной сферы?