КУРС АЛГЕБРЫ, ВШЭ (осень 2017)

Валерий Алексеевич Гриценко

ТЕМА 1. Линейные подпространства в $\mathbb{F}_2^n$.

Основные результаты Темы 1.
Каждое подпространство F_2^n содержит 2^k векторов, где $0 \le k \le n$. Доказательство этой теоремы (Лекция 1, 06.09) дает алгоритм построения базиса подпространства, алгоритм расширения базиса подпространства до базиса всего пространства и формулу для $\dim(V+U)$ (Лекция 2).

Основные примеры и задачи:

1) Конечная плоскость Фано, т.е. “граф” $\mathbb{P}(\mathbb{F}_2^3)$ (Лекции 1, сделано.)

2) Число базисов n-мерного пространства над $\mathbb{F}_2$.

3) Число k-мерных подпространств в $\mathbb{F}_2^n$.

УПРАЖНЕНИЯ по ТЕМЕ 1.

Упражнение 1. Структура множества ненулевых линейных подпространств в $\mathbb{F}_2^3$. (**Конечная проективная плоскость Фано**, сделано на первой лекции.)

1) Доказать, не прибегая к формуле размерности суммы подпространств, что пересечение любых двух "плоскостей"(подпространств размерности два) в $\mathbb{F}_2^3$ является некоторой “прямой” (подпространством размерности один).

2) Найти число подпространств размерности один и два (“прямых” и “плоскостей”) в трехмерном пространстве $\mathbb{F}_2^3$, не перебирая все подпространства.

3) Дать схему всех ненулевых линейных подпространств в $\mathbb{F}_2^3$. (Было сделано в лекции.)

Упражнение 2. Базисы в $\mathbb{F}_2^3$. 1) Найти число всех базисов в $\mathbb{F}_2^2$ и $\mathbb{F}_2^3$.

2*) Дать список всех базисов в $\mathbb{F}_2^2$ и $\mathbb{F}_2^3$, т.е. предложить алгоритм, выписывающий все базисы в каком-то порядке.

Упражнение 3. В этом упражнении мы рассматриваем *подпространства в четырехмерном пространстве* $\mathbb{F}_2^4$.

1) Найти число одномерных подпространств.

2) Найти число двумерных подпространств. (Сделано в Лекции 2, 06.09.)

3) Найти число трехмерных подпространств, используя выборы базисов.

4) Пусть (v_1, v_2) какой-то базис двухмерного подпространства (плоскости) V_2 в $\mathbb{F}_2^4$. Сколькими способами его можно достроить до базиса пространства $\mathbb{F}_2^4$?

5) Найти число плоскостей U_2 в $\mathbb{F}_2^4$ таких, что $V_2 \cap U_2 = \{0\}$.

6) Найти число плоскостей U_2 в $\mathbb{F}_2^4$ таких, что пересечение $V_2 \cap U_2$ одномерно.

7) Найти число различных представлений четырехмерного пространства $\mathbb{F}_2^4$ в виде суммы двух плоскостей.

8) Зафиксируем какое-то трехмерное подпространство U_3 в $\mathbb{F}_2^4$. Найти число трехмерных подпространств V_3 в $\mathbb{F}_2^4$ таких, что пересечение $U_3 \cap V_3$ одномерно и таких, что пересечение $U_3 \cap V_3$ двумерное.

9) Найти число различных представлений четырехмерного пространства $\mathbb{F}_2^3$ в виде суммы двух трехмерных подпространств.

10*) Полным флагом в пространстве $\mathbb{F}_2^4$ называется последовательность подпространств $\{\bar{0}\} \subset V_1 \subset V_2 \subset V_3 \subset \mathbb{F}_2^4$, где $\dim V_m = m$. Найти число полных флагов.

Упражнение 4. Линейная независимость векторов.

1) Есть ли базис у нулевого векторного подпространства?

2) Если система векторов содержит нулевой вектор, то она линейно зависима.

3) Если система векторов содержит два одинаковых вектора, то она линейно зависима.

4) Доказать, что любые два различные ненулевых вектора в $\mathbb{F}_2^n$ линейно независимы.

5) Найти простой критерий линейной независимости трех ненулевых попарно различных векторов в $\mathbb{F}_2^n$.

6) Аналогичный вопрос для четырех векторов.

7) Векторы $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{F}_2^n$ $(m > 1)$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы один из них линейно выражается через остальные.

8) Пусть векторы $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{F}_2^n$ линейно независимы. Вектор u линейно выражается через $v_1, \ldots, v_m$ тогда и только тогда, когда векторы $v_1, \ldots, v_m, u$ линейно зависимы.

9) Пусть вектор u линейно выражается через $v_1, \ldots, v_m$. Это выражение единственно тогда и только тогда, когда $v_1, \ldots, v_m$ линейно независимы.

Упражнение 5. Образующие и базисы в V.

1) Используя метод доказательства Теоремы 1 (*метод удвоения:* $V' = V \cup (u + V)$, где $u \notin V$), доказать, что система векторов $(u_1, \ldots u_m)$ порождает подпространство $V \subset \mathbb{F}_2^n$, т.е.

$$V = < u_1, \ldots u_m > = \{a_1 u_1 + \ldots + a_m u_m,\ a_i \in \mathbb{F}_2\},$$

тогда и только тогда, когда она содержит некоторый базис $(u_{i_1}, \ldots u_{i_k})$ подпространства V.

2) Пусть имеются два подпространства $U \subset V \subset \mathbb{F}_2^n$. Рассмотрим какой-нибудь базис $(u_1, \ldots, u_k)$ подпространства U и дополним его векторами $(v_{k+1}, \ldots, v_m)$ до базиса подпространства V. Доказать, что любая ненулевая линейная комбинация этих векторов не лежит в подпространстве U

$$\forall\, b_{k+1}, \ldots, b_m \in \mathbb{F}_2 : \; b_{k+1}v_{k+1} + \ldots + b_m v_m \notin U.$$

Упражнение 6. Примеры подпространств. В каждом из примеров установить, является ли рассматриваемое множество линейным подпространством в $\mathbb{F}_2^n$. Если это так, то найти его размерность и какой-нибудь базис. Если множество не является подпространством, представить его, по возможности, линейно, используя какое-нибудь подпространство.

1) Множество векторов, у которых совпадают первая и последняя координаты.

2) Множество векторов, у которых координаты с четными номерами равны 0.

3) Множество векторов, у которых координаты с четными номерами равны между собой.

4) Множество векторов, содержащих четное число координатных единиц.

5) Множество векторов, содержащих нечетное число координатных единиц.

6) Множество векторов, число координатных единиц которых делится на 4.

Упражнение 7. Плоскости и трехмерные подпространства.

1) Найти число плоскостей в $\mathbb{F}_2^n$.

2) Найти число трехмерных подпространств в $\mathbb{F}_2^n$.

3) Найти число трехмерных подпространств, содержащих данную прямую $V_1 \subset \mathbb{F}_2^n$.

4) Найти число подпространств V_2 и V_3 размерности 2 и 3 в $\mathbb{F}_2^5$ таких, что $V_2 + V_3 = \mathbb{F}_2^5$.

5) Найти число трехмерных подпространств V_3 и U_3 в $\mathbb{F}_2^5$ таких, что $V_3 + U_3 = \mathbb{F}_2^5$.

6) Найти число попарно не пересекающихся четырех плоскостей в восьмимерном пространстве $\mathbb{F}_2^8$.

Упражнение 8. Пересечение подпространств. Пусть U, V, W – подпространства $\mathbb{F}_2^n$.

1) Если $\dim U + \dim V > n$, то $U \cap V \neq \{\bar{0}\}$.

2) Если $\dim (U + V) = 1 + \dim(U \cap V)$, то сумма $U + V$ равна одному из подпространств.

3) Можно ли утверждать, что $U \cap (V + W) = (U \cap V) + (U \cap W)$?

4) Доказать, что

$$(U + W) \cap (W + V) \cap (V + U) = [(W + V) \cap U] + [(V + U) \cap W].$$

Упражнение 9. k-мерные подпространства в $\mathbb{F}_2^n$.

1) Мы доказали, что число различных базисов n-мерного бинарного пространства равно

$$B_n = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 2^2)(2^n - 2^3) \cdot \ldots \cdot (2^n - 2^{n-1}).$$

Доказать, что B_n делится на $n!$.

2) Доказать, что число гиперплоскостей, т.е. подпространств размерности $n - 1$, равно числу прямых, подпространств размерности 1.

3) Сравнить число плоскостей, т.е. подпространств размерности 2, с числом подпространств размерности $n - 2$.

4) Аналогичный вопрос для подпространств размерностей k и $n - k$.

5*) Установить взаимно однозначное соответствие между подпространствами размерностей k и $n - k$, используя алгебраические или геометрические соображение, т.е. не используя явную формулу для числа подпространств.

Упражнение 10. Полные флаги. Найти число полных флагов

$$\{\bar{0}\} \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset \mathbb{F}_2^n.$$

n-мерного пространства над $\mathbb{F}_2$, где все включения строгие.

Упражнение 11*. 1) **Ненулевые подпространства в $\mathbb{F}_2^4$.** Дать описание “графа” всех ненулевых подпространств в $\mathbb{F}_2^4$ аналогичное описанию из Упражнения 1.

2**) Как бы вы могли бы описать взаимное расположение всех подпространств пространства $\mathbb{F}_2^n$?