Логика и алгоритмы 2017. Листок 1.
Срок сдачи 6.10

Обязательные задачи

1. Даны множества A, B и C. Докажите существование и равенство следующих множеств:
$$(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = A \setminus (B \cup C).$$

2. *Упорядоченную пару* множеств (x, y) определим как множество $\{\{x\}, \{x, y\}\}$. Докажите, что
$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \iff (x_1 = x_2 \text{ и } y_1 = y_2).$$

3. Даны конечные множества A и B из n и m элементов, соответственно. Найдите количество
   а) всех подмножеств A;
   б) всех бинарных отношений на множестве A
   в) всех функций из A в B;
   г) всех инъективных функций из A в B.

4. Постройте бинарное отношение C на 3-элементном множестве $\{x, y, z\}$, такое что C рефлексивно и симметрично, но не транзитивно.

5. **(письменно)** Пусть $f : A \to B$ и $g : B \to A$ — отображения, такие что $g \circ f = 1_A$ (тождественное отображение). Докажите, что f — инъекция, а g — сюръекция.

6. **(письменно)** Считаем, что множество $\mathbb{N}$ содержит 0. Постройте биекцию между множеством $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ и множеством всех натуральных чисел, которые делятся на 2 и 3 и не делятся на другие простые числа.

Дополнительные задачи

7. Докажите, что всякое отображение множеств $f : A \to B$ можно представить в виде композиции $g \circ h$, где g — инъекция, h — сюръекция.

8. Постройте биекции:
   а) между прямой $\mathbb{R}$ и открытым интервалом $(0, 1)$;
   б) между открытым интервалом $(0, 1)$ и замкнутым интервалом $[0, 1]$;
   в) между (сплошным) замкнутым квадратом и замкнутым кругом.

9. Постройте биекцию между множеством решений двойного неравенства $1 \le x^2 + y^2 \le 4$ и замкнутым квадратом.

10. Пусть X — множество всех ненулевых векторов плоскости, $\upuparrows$ — отношение сонаправленности. Проверьте, что это отношение эквивалентности и установите биекцию между $X/\upuparrows$ и окружностью радиуса 1.

11. Даны множества A, B и C, из которых любые два пересекаются, но никакое из этих множеств не содержится в объединении двух других. Какое наименьшее число элементов может содержать множество $A \cup B \cup C$?

12. Сформулируйте определение неупорядоченной тройки $\{a, b, c\}$. Какие аксиомы нужны, чтобы доказать существование любой такой тройки?

13. Постройте множество A и биекции $f : A \to A$, $g : A \to A$, такие что $f \circ g = g \circ f$, но ни одно из отображений f, g, $f \circ g$ не является тождественным.