Классическая теория поля 2017

Листок 1. Принцип наименьшего действия и законы сохранения

Срок сдачи: до 3 октября

---

1. Регулятор Уатта (*Джеймс Уатт, 1788*) состоит из четырех одинаковых стержней OA, OB, AC и BC длины ℓ, двух грузов A и B, имеющих массу m каждый, и муфты C массы M, которая может скользить вдоль вертикальной оси Oz, проходящей через неподвижную точку O (см. рис.1). Вся система может вращаться вокруг оси Oz. Масса стержней и трение пренебрежимо малы. На грузы действует однородная сила тяжести, направленная против оси Oz.

а) Выбрав подходящий набор обобщенных координат, постройте действие этой механической системы.

б) Определите выполняющиеся в ней законы сохранения.

2. Качели-карусели. Механическая система состоит из 2-х невесомых жестких стержней длины R и L, и груза массы m (см. рис.2). Конец стержня R закреплен в начале координат, и стержень может свободно (без трения) вращаться вокруг этого конца в горизонтальной плоскости xOy. Второй конец стержня R соединен шарниром с концом стержня L, причем шарнир позволяет стержню L свободно вращаться в вертикальной плоскости, содержащей стержни R и L. На свободном конце стержня L закреплен груз m. В системе действует однородная сила тяжести, направленная против оси Oz.

а) Постройте лагранжиан, используя в качестве обобщенных координат углы θ и φ (см. рис.2). Найдите законы сохранения.

б) Определите стационарные по θ траектории движения, т.е. траектории, на которых $\dot{\theta} = 0$.

3. На римановой поверхности с координатами q^i и метрикой $g_{ij}(q)$ уравнения геодезических можно получить как уравнения движения свободной материальной точки с кинетической энергией $T = \sum_{i,j} g_{ij}(q)\,\dot{q}^i\dot{q}^j$. В то же время геодезические — кратчайшие линии между точками поверхности, а функционал длины кривой, соединяющей точки $a = \{q^i(a)\}$ и $b = \{q^i(b)\}$ имеет вид

$$S[q^i(t)] \;=\; \int_a^b \sqrt{\textstyle\sum_{i,j} g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j}\,dt\,.$$

а) Выпишите уравнения геодезических и докажите, что их решения являются экстремалями функционала S.

б) Выбрав подходящие координаты на поверхности однополостного гиперболоида вращения $x^2 + y^2 - \frac{z^2}{a^2} = 1$, определите метрику, индуцированную на ней в $\mathcal{R}^3$. Запишите лагранжиан свободной частицы на этой поверхности и найдите законы сохранения.

4. Решите **задачу Кеплера** (*Иоганнн Кеплер, 1571-1630*) о движении двух тел, потенциал взаимодействия которых зависит только от расстояния r между ними: $U(r) \sim -1/r$. При решении обратите внимание на симметрии задачи и на применение соответствующих законов сохранения.

а) Отделите движение центра масс и, применив закон сохранения импульса, определите его.

б) Сформулируйте закон сохранения момента импульса как следствие симметрии задачи относительно вращений в 3-мерном пространстве. Перейдите к рассмотрению движения в плоскости, использовав постоянство направления вектора момента импульса.

в) Определите сохраняющуюся величину момента импульса (второй закон Кеплера). Используйте этот закон для редукции проблемы к задаче с одной (радиальной) степенью свободы.

г) Сформулируйте закон сохранения энергии и определите форму траекторий движения тел (первый закон Кеплера).

5. Материальная точка массы m движется в однородном силовом поле по прямой: $L(x, \dot{x}) = \frac{m\dot{x}^2}{2} + gx$. Определите закон сохранения, отвечающий преобразованию симметрии $\tilde{t} = t$, $\tilde{x} = x + \epsilon$.

6. Задача о брахистохроне (*Иоганн Бернулли, 1696*). Материальная точка, начальная скорость которой равна 0, движется без трения в вертикальной плоскости под действием силы тяжести по некоторой кривой, соединяющей две заданные точки, начальную и конечную. Задача состоит в том, чтобы найти такую кривую, называемую брахистохроной, движение по которой из начальной точки в конечную занимает наименьшее время. Пользуясь вариационным принципом, составьте дифференциальное уравнение брахистохроны. Определите форму брахистохроны, используя аналог закона сохранения энергии при интегрировании дифференциального уравнения.

7. Найдите дифференциальные уравнения, характеризующие экстремали функционала

$$S[q^i(t)] \;=\; \int_{t_1}^{t_2} L(q^i, \dot{q}^i, \ddot{q}^i)\, dt$$

на траекториях с фиксированными координатами и скоростями в начальный и конечный моменты времени: $q^i(t_1) = q_1^i$, $\dot{q}^i(t_1) = \dot{q}_1^i$, $q^i(t_2) = q_2^i$, $\dot{q}^i(t_2) = \dot{q}_2^i$.

Что изменится, если искать решение этой вариационной задачи на множестве траекторий с фиксированными координатами, но произвольными скоростями в начальный и конечный моменты времени?

8. Однородная балка прямоугольного сечения с постоянной толщиной и шириной прогибается под действием силы тяжести. Потенциальная энергия упругой деформации балки в главном приближении имеет вид

$$U_{\text{упр}} = \kappa \int_0^L dx (y''(x))^2 \,,$$

где L – длина балки, κ – коэффициент, зависящий от размеров сечения и материала балки, а функция $y(x)$ задает отклонение средней линии балки вниз от горизонтали (см. рис.2). В состоянии равновесия потенциальная энергия балки минимальна. Определите форму балки для трех нижеперечисленных граничных условий.

а) Мостик: концы балки свободно лежат на двух опорах, опоры расположены на одной высоте.

б) Перекрытие (потолок): балка обоими концами горизонтально вмонтирована в стену.

в) Балкон: балка одним концом горизонтально вмонтирована в стену, а другой ее конец не закреплен.

Рис. 1

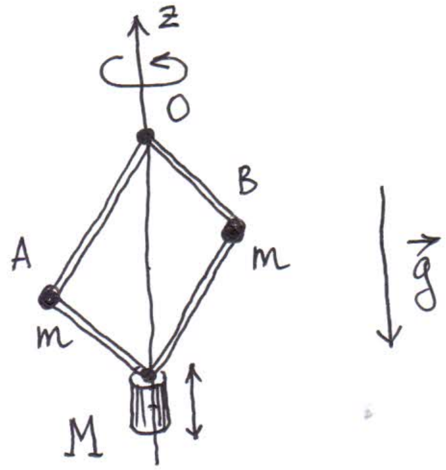


Рис. 2

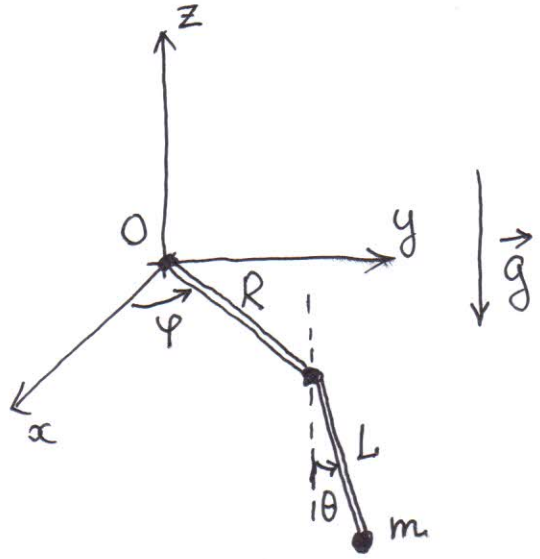
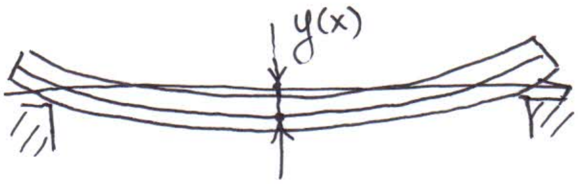
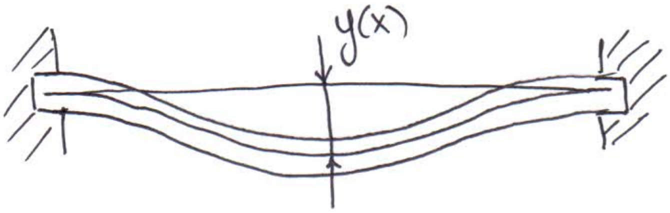


Рис. 3

а)



б)



в)