Материалы к семинарам по матанализу, группа С
2-я неделя (11–15.09.2017)

Краткое содержание лекций

Лекция 3 (13.09.2017)

1. Операции над вещественными числами
2. Аксиомы упорядоченного поля
3. Вещественные числа как модель для системы аксиом упорядоченного поля (продолжение на лекции 4)

Лекция 4 (20.09.2017)

1. Полнота вещественной прямой
2. Критерий Коши
3. Арифметика пределов
4. Предел монотонной ограниченной последовательности
5. Теорема о вложенных сжимающихся отрезках

Примерные задачи семинаров 3 и 4

Пределы последовательностей

Задача 2.1. Докажите, что сходящаяся последовательность ограничена. Приведите пример, когда обратное неверно.

Задача 2.2. Последовательность a_n ненулевых чисел стремится к нулю тогда и только тогда, когда $1/a_n \to \infty$.

Задача 2.3. Верно ли, что если (x_n) и (y_n) расходятся (не имеют предела), то x_n+y_n также расходится?

Задача 2.4. Докажите «только тогда» в критерии Коши: если последовательность сходится, то она фундаментальна.

Вычисление пределов

Задача 2.5. Найдите предел $P_m(n)$, где P_m - многочлен степени $m > 0$.

Задача 2.6. Найдите предел $\frac{P_k(n)}{P_k(n)}$. Исследуйте ответ в зависимости от k и m.

Задача 2.7. Найдите предел $((-2)^n + 3^n)/((-2)^{n+1} + 3^{n+1})$.

Задача 2.8. Найдите предел $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

Задача 2.9. Найдите предел $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\sqrt{n}$.

Задача 2.10. *Докажите, что $\sqrt[n]{n} \to 1$.

Задача 2.11. Докажите, что последовательность $H_n = 1 + (1/2) + \cdots + (1/n)$ стремится к $+\infty$.

Задача 2.12. Найдите предел (1) $x_n = \dfrac{1}{1\cdot 2} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)}$;

Задача 2.13. Докажите, что последовательность: $x_n = \dfrac{1}{1^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}$ сходится.

Задача 2.14. При каких a сходится ряд: (2) $y_n = \dfrac{1}{1^a} + \cdots + \dfrac{1}{n^a}$?.

Иррациональные числа

Задача 2.15. Докажите, что уравнение $(p/q)^2 = 2$ не имеет решений среди целых p и q.

Задача 2.16. Возьмем последовательность $a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots$ определяемую так:

$$a_0 = 1,\ a_k = \begin{cases} a_{k-1} + \frac{1}{2^k},\ \text{если } \left(a_{k-1} + \frac{1}{2^k}\right)^2 < 2 \\ a_{k-1},\ \text{если } \left(a_{k-1} + \frac{1}{2^k}\right)^2 > 2. \end{cases}$$

Докажите, что эта последовательность фундаментальна, и ее предел равен корню из двух (квадрат предела равен двум).

Задача 2.17*. Пусть $a_{k+1} = (a_k + 2/a_k)/2$, где рациональное $a_0 > 0$ задано произвольно.
(1) $a_k^2 \geq 2$ при $k \geq 1$.
(2) Последовательность a_k монотонна.
(3) Последовательность a_k имеет предел, причём его квадрат равен двум.

Задача 2.18. Что можно сказать об (ир)рациональности суммы (произведения) двух рациональных/рационального и иррационального/двух иррациональных чисел?

Мощность множества $\mathbb{R}$

Эта часть войдет в листок. Ее наверняка не удастся разобрать на семинаре целиком. Не страшно, если она и войдет в листок, и будет начата на семинаре.

Задача 2.19. Докажите, что каждое действительное число имеет (хотя бы одну) двоичную запись.

Задача 2.20. Докажите, что если множество A бесконечно, то из него можно выделить счётное подмножество B.

Задача 2.21. Докажите, что если A несчетно, а C счётно, то $A \cup C$ равномощно A.

Задача 2.22. Докажите, что множество всех двоично-рациональных дробей $\{p/2^k\}$ на отрезке $[0, 1]$ счётно.

Задача 2.23. Докажите, что отрезок $[0, 1]$ и интервал $(0, 1)$ имеют мощность континуума.

Задача 2.24. Докажите, что множество $\mathbb{R}$ имеет мощность континуума.