Лекция 3. Операции над вещественными числами

1 Напоминание материала лекции 2

2 Сумма и произведение

Определение 1 *Чтобы сложить (перемножить) действительные числа, нужно сложить (перемножить) соответствующие фундаментальные последовательности.*

На языке формул: $x \sim (x_n),\ y \sim (y_n) \Rightarrow x + y \sim (x_n + y_n),\ xy \sim (x_n y_n)$.

Как уже говорилось в лекции 2, когда производятся операции над классами эквивалентности, нужно проверить независимость результата от выбора представителя, то есть доказать корректность определения. При этом менять можно только одного представителя.

Теорема 1 *Если последовательности (x_n), (y_n), (z_n) фундаментальны, и $(y_n) \sim (z_n)$, то последовательность $(x_n + y_n)$ фундаментальна, и $(x_n + y_n) \sim (y_n + z_n)$.*

Доказательство Докажем сначала фундаментальность последовательности $(x_n + y_n)$. Проверим определение. Возьмем произвольное ε. По определению, существует такое N, что для любых $k, l > N$,

$$|x_k - x_l| < \varepsilon,\ |y_k - y_l| < \varepsilon.$$

Тогда

$$|(x_k + y_k) - (x_l + y_l)| < 2\varepsilon,$$

что и требовалось.

Последовательности $(x_n + y_n)$ и $(x_n + z_n)$ эквивалентны, поскольку (y_n) и z_n эквивалентны: $y_n - z_n \to 0$. $\square$

Теорема 2 *Если последовательности (x_n), (y_n), (z_n) фундаментальны, и $(y_n) \sim (z_n)$, то последовательность $(x_n y_n)$ фундаментальна, и $(x_n y_n) \sim (x_n z_n)$.*

Лемма 1 *Если последовательность фундаментальна, то она ограничена.*

Доказательство Возьмем $\varepsilon = 1$ и соответствующее N. Тогда для любого $k > N + 1$ имеем:

$$|x_{N+1} - x_k| < 1.$$

Пусть

$$C = \max\{|x_1|, \ldots, |x_{N+1}|\}.$$

Тогда для любого k

$$|x_k| < C + 1.$$

□

Доказательство теоремы 2. Докажем сначала фундаментальность последовательности $(x_n y_n)$. Проверим определение. Возьмем произвольное ε. По определению, существует такое N, что для любых $k, l > N$,

$$|x_k - x_l| < \varepsilon, \ |y_k - y_l| < \varepsilon.$$

По лемме 1, существует такое C, что $|x_n| < C, \ |y_n| < C$ для всех n. Тогда для любых $k, l > N$,

$$|x_k y_k - x_l y_l| < |x_k y_k - x_k y_l + x_k y_l - x_l y_l| \leq |x_k(y_k - y_l)| + |y_l(x_k - x_l)| < 2C\varepsilon.$$

Это доказывает фундаментальность последовательности $(x_n y_n)$.

Пусть теперь $(z_n) \sim (y_n)$. Докажем, что $(x_n z_n) \sim (x_n y_n)$. Действительно,

$$|x_n z_n - x_n y_n| = |x_n(z_n - y_n)| < C|z_n - y_n|.$$

Но $z_n - y_n \to 0$; следовательно, $x_n z_n - x_n y_n \to 0$. □

Итак, мы доказали корректность определений сложения и умножения действительных чисел.

Вычитание и деление определяются как действия, обратные сложению и умножению. Нам нужно доказать, что они тоже определены корректно. Кроме того, мы хотим доказать привычные свойства сложения и умножения: коммутативность, ассоциативность и дистрибутивность (ремпределительный закон). Существуют разные множества, на которых арифметические операции с такими свойствами определены: рациональные, вещественные, комплексные числа и т.д. Все такие множества называются *полями* и определяются одним и тем же набором аксиом.

3 Аксиомы поля*

Поле - это множество, на котором определены операции сложения и умножения, удовлетворяющие следующим аксиомам.

1. Сложение коммутативно и ассоциативно.
2. Существует элемент 0, прибавление которого ничего не меняет: $x + 0 = x$.
3. Для каждого элемента существует противоположный: сумма этих двух элементов равна нулю.

4. Умножение коммутативно и ассоциативно.

5. Существует элемент 1, умножение на который ничего не меняет: $x \cdot 1 = x$.

6. Для каждого ненулевого элемента существует обратный: произведение этих двух элементов равно 1.

7. Распределительный закон: для любых трех x, y, z:

$$(x + y)z = xz + yz.$$

Из этих аксиом выводятся следствия: развивается теория полей. Вот одно из следствий.

Предложение 1 *Произведение любого элемента на* 0 *равно нулю.*

Доказательство $(x + 0)y = xy + 0y$ по аксиоме 7. $(x + 0) = x$ по аксиоме 2. Следовательно,

$$(x + 0)y = xy.$$

Возьмем $(-xy)$ по аксиоме 3: $xy + (-xy) := xy - xy = 0$.

Тогда

$$(x + 0)y - xy = 0y = xy - xy = 0.$$

□

4 Аксиомы натурального ряда*

Натуральные числа плюс 0 удовлетворяют аксиомам $1, 2, 4, 5, 7$ и аксиоме индукции:

Если множество натуральных чисел содержит 1 *и вместе с каждым n содержит $n + 1$, то оно совпадает со всем натуральным рядом.* Целые числа - это натуральные плюс 0, вместе с формально присоединенными к ним обратными. Целые числа удовлетворяют также аксиоме 3.

Теорема 3 *Рациональные числа образуют поле.*

Эта теорема выводится из определния рациональных чисел и операций над ними, данных во второй лекции, а также из аксиом натурального ряда. Проверьте, что вы можете доказать любую из этих аксиом, и не тратьте время на доказательство всех.

STOP. Что значит “доказать аксиому”?!

Это означает следующее. С одной стороны, есть конструктивно определенное множество и операции на нем. Свойства, выраженные аксиомами, для конструктивно построенного множества являются теоремами. Их и надо доказывать. Если это удается, конструктивно определенное множество называется *моделью* для системы аксиом.

Теорема 4 *Действительные числа образуют поле.*

Доказательство Все аксиомы поля для $\mathbb{R}$, кроме существования обратного элемента, сразу следуют из тех же аксиом для Q. Докажем, например, распределительный закон. Пусть $x, y, z \in \mathbb{R},\ x \sim (x_n), y \sim (y_n), z \sim (z_n)$. Тогда

$$(x+y)z \sim ((x_n+y_n)z_n),\ xz+yz \sim (x_n z_n + y_n z_n).$$

Но

$$(x_n+y_n)z_n = x_n z_n + y_n z_n$$

по распределитьельному закону для рациональных чисел.

Теорема 5 *Любое ненулевое вещественное число имеет обратное.*

По модулю теоремы 5, теорема 4 доказана. $\square$

5 Существование обратного элемента

Это единственный нетривиальный результат за всю лекцию. Следующая лемма влечет теорему 5.

Лемма 2 *Пусть* $(x_n) \sim x \neq 0$. *Тогда* $\exists N \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N} : \forall\ n > N$

$$|x_n| > \frac{1}{m}.$$

Доказательство Предположим противное. Построим отрицание к лемме. Для этого кванторы существования и всеобщности надо поменять местами, а утверждение заменить на противоположное:

$$\forall\ N \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}\ \exists\ n > N :$$

$$|x_n| < \frac{1}{m}. \tag{1}$$

Другими словами, в последовательности (x_n) сколь угодно далеко найдется сколь угодно малый элемент. Но последовательность фундаментальна, и каждый ее "достаточно далекий" элемент держит все остальные вблизи себя. Мы выводти отсюда, что $x_n \to 0$, а, значит, $x = 0$, противоречие.

Возьмем произвольное m; существует N такое, что $\forall\ k, l > N$,

$$|x_k - x_l| < \frac{1}{m}.$$

Возьмем $n > N$ такое, что $|x_n| < \frac{1}{m}$; такое n существует по предположению. Тогда $\forall\ l > N$

$$|x_n - x_l| < \frac{1}{m},\ |x_n| < \frac{1}{m}.$$

Следовательно, $\forall\ l > N$

$$|x_l| < \frac{2}{m}.$$

Значит, $x_n \to 0$, противоречие. $\square$

Доказательство Теоремы 5. Пусть $x \neq 0,\ (x_n) \sim x$. Тогда существуют такие m и N, как в лемме 2. Класс эквивалентности фундаментальной последоватеьности (x_n) не меняется, если из нее исключить конечное число членов, то есть заменить ее на (y_n):

$$y_n = x_{n+N},\ n \in \mathbb{N}.$$

Докажите это! Из (1) для (y_n) следует:

$$\left|\frac{1}{y_n}\right| < m\ \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Докажем, что последовательность $\frac{1}{(y_n)}$ фундаментальна. Для дюбого $p \in N$ возьмем такое N что при $k, l > N$,

$$|y_k - y_l| < \frac{1}{p}.$$

Тогда

$$\left|\frac{1}{y_k} - \frac{1}{y_l}\right| < \frac{|y_l - y_k|}{|y_k y_l|} < \frac{1}{p} \cdot m^2.$$

Это доказывает фундаментальность последовательности $(\frac{1}{y_n})$, поскольку p произвольно, а m фиксировано.

Обозначим через $\frac{1}{y}$ число, представленное последовательностью $\left(\frac{1}{y_n}\right)$. Оно является обратным к y, поскольку произведение $y \cdot \frac{1}{y} \sim \left(y_n \cdot \frac{1}{y_n}\right) \sim (1)$ представлено стационарной последовательностью, состоящей из одних 1. $\square$

6 Положительные и отрицательные числа*

Определение 2 *Число x называется положительным (отрицательльным), если существует такой его представитель (x_n) и такое $m \in \mathbb{N}$, что $x_n > \frac{1}{m}\ \forall\ n$ (соответственно, $x_n < -\frac{1}{m}\ \forall\ n$).*

Теорема 6 *Каждое ненулевое вещественное число либо положительно, либо отрицательно.*

Доказательство Пусть $x \neq 0$. По лемме 2 существует такое $(x_n) \sim x$ и такое m, что $|x_n| > \frac{1}{m}\ \forall\ n$. Докажем, что тогда существует N такое, что либо

$$x_n > \frac{1}{m}\ \forall\ n > N,$$

либо

$$x_n < -\frac{1}{m}\ \forall\ n > N.$$

Предположим противное. Тогда $\forall\ N\ \exists\ k, l > N$ такие, что

$$x_k > \frac{1}{m},\ x_l < -\frac{1}{m}.$$

Но тогда

$$|x_k - x_l| > \frac{2}{m}.$$

Значит, последовательность (x_n) не фундаментальна - противоречие. $\square$

Разделы, отмеченные * на лекции 13 сентября прочтены не были.