

# Материалы к семинарам по матанализу

3-я неделя (18–22.09.2017)

## Краткое содержание лекций

### Лекция 4 (20.09.2017)

1. Полнота вещественной прямой
2. Критерий Коши
3. Арифметика пределов
4. Предел монотонной ограниченной последовательности
5. Теорема о вложенных сжимающихся отрезках

### Лекция 5 (27.09.2017)

1. Супремум и инфимум
2. Сходящиеся подпоследовательности
3. Конечные подпокрытия

## Примерные задачи семинаров 5 и 6

*Часть задач предыдущего листка была перенесена в текущий.*

### Иррациональные числа

**Задача 3.1.** Докажите, что уравнение  $(p/q)^2 = 2$  не имеет решений среди целых  $p$  и  $q$ .

**Задача 3.2.** Что можно сказать об (ир)рациональности суммы (произведения) двух рациональных/рационального и иррационального/ двух иррациональных чисел?

**Задача 3.3.** Докажите, что если многочлен с целыми коэффициентами имеет рациональный корень  $\frac{p}{q}$ , то числитель дроби  $p$  является делителем свободного члена, а знаменатель  $q$  – делителем старшего коэффициента этого многочлена.

### Пределы последовательностей

**Задача 3.4.** Докажите принцип двух милиционеров (видимо, теперь уже полицейских) для последовательностей: если последовательности  $x_n, y_n, z_n$  таковы, что  $\forall n \in \mathbb{N} x_n \leq y_n \leq z_n$ , а  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A$ , то и  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A$ .

**Задача 3.5.** Найдите предел  $\frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$ .

**Задача 3.6.** Найдите предел  $\frac{2^{n^2} + 10^n}{2^{n^2+3} + 3^{n+1}}$ .

**Задача 3.7\*.** Докажите, что  $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ .

**Задача 3.8.** Докажите, что последовательность  $H_n = 1 + (1/2) + \dots + (1/n)$  стремится к  $+\infty$ .

**Задача 3.9\*.** При каких  $a$  сходится последовательность  $y_n = \frac{1}{1^a} + \dots + \frac{1}{n^a}$ ?

Указание: разбить на группы  $n = 2^{k-1} + 1, \dots, 2^k$  (как в задаче 3.8).

**Задача 3.10.** Найдите предел последовательности  $\frac{\ln n}{n}$ .

**Задача 3.11.** Найдите предел последовательности  $\frac{(\ln n)^k}{n}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

**\*Подпоследовательности и предельные точки (возможно, останутся на следующую неделю)**

**Задача 3.12\*** Докажите, что если последовательность сходится, то любая ее подпоследовательность имеет тот же предел.

**Задача 3.13\*** Существует ли последовательность, у которой множество предельных точек совпадает с множеством

1.  $\{-1, 1\}$
2.  $\mathbb{N}$
3. множеством дробей вида  $1/n$ ,  $n \in \mathbb{N}$
4.  $[0, 1]$

**Простейшие свойства рядов**

**Задача 3.14.** Докажите теорему сравнения для положительных рядов: если два ряда с неотрицательными членами  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  таковы, что  $\exists N : \forall n > N \ a_n \leq b_n$ , то из сходимости второго из этих рядов следует сходимость первого, или – что то же – из расходимости первого следует расходимость второго.

**Задача 3.15.** Докажите, что если ряд сходится абсолютно, то он сходится.

**Задача 3.16.** Докажите признак Лейбница сходимости знакочередующихся рядов: если последовательность членов знакочередующегося ряда монотонно убывает по модулю и стремится к 0, то он сходится.

**Суммирование рядов**

**Задача 3.17.** Сходится ли ряд  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$ ?

**Задача 3.18.** Сходится ли ряд  $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$ ?

**Задача 3.19.** Докажите сходимость ряда  $1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + \dots$  при условии  $|a| < 1$  и найдите его сумму.

**Задача 3.20.** Докажите сходимость ряда  $1 + 4a + 9a^2 + 16a^3 + \dots$  при условии  $|a| < 1$  и найдите его сумму.

Рекомендуемые задачи на дом (к 29 сентября): 3.3, 3.6, 3.7, 3.9, 3.11, 3.19, 3.20. Задачи со \* - бонусные.