Листок 1.1

Мощности и пределы

срок сдачи 4 октября

Мощности

Задача 1. Дайте полное доказательство того, что вещественная прямая имеет мощность континуум, то есть равномощна множеству всех подмножеств натурального ряда.

Указание. Результатами о представлении действительных чисел в виде бесконечной двоичной дроби можно пользоваться без доказательства.

Задача 2. Докажите, что евклидова (т. е. координатная) плоскость имеет мощность континуум.

Пределы

Задача 3. Выясните, при каких значениях параметра $a \in \mathbb{R}$ сходится последовательность

$$x_n = \frac{n2^n + a^n}{(2n+2)2^n + (3n+1)a^n},$$

и найдите её предел $L(a)$. Постройте график зависимости $L(a)$ от a.

Задача 4. Пусть последовательность x_n сходится к a. Докажите, что тогда и последовательность средних арифметических $c_n = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$ сходится к a. Приведите пример расходящейся последовательности x_n, для которой последовательность c_n сходится.

Задача 5. Докажите, что не существует самого медленно сходящегося ряда. Другими словами, для любого сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами существует сходящийся ряд с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ такой, что $b_n/a_n \to \infty$.

Пусть f — *сжимающее отображение* отрезка $[a,b]$ в себя: существует такое $q \in (0,1)$, что для любых точек $x, y \in [a,b]$

$$|f(x) - f(y)| \le q|x - y|.$$

Задача 6. Отображение f имеет единственную *неподвижную точку* $x_0 \in [a,b]$, то есть такую точку, для которой $f(x_0) = x_0$.

Задача 7. Пусть $x_1 \in [a,b]$ произвольно, а $x_{n+1} = f(x_n)$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что x_n сходится к неподвижной точке x_0, причём расстояние $|x_n - x_0|$ убывает экспоненциально быстро.

Найдите пределы следующих рекуррентных последовательностей:

Задача 8. $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n}$.

Задача 9.* $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2} + \dfrac{1}{x_n}$.

Задача 10.* Последовательность x_n удовлетворяет условию $0 \le x_{n+m} \le x_n + x_m$ при всех $n, m \in \mathbb{N}$. Докажите, что последовательность x_n/n сходится.