Лекция 4. Полнота вещественной оси. Пределы.

1 Аксиомы порядка.

Поле является *упорядоченным*, если наряду с аксиомами поля оно удовлетворяет следующим *аксиомам порядка.*

Аксиома 1 *Каждый элемент упорядоченного поля - либо положительный, либо отрицательный, либо* 0. *Другими словами, поле без нуля разделено на два непересекающихся класса; элементы одного называются положительными, элементы другого - отрицательными.*

Эта аксиома становится содержательной, если объяснить, какими свойствами обладают названные классы.

Аксиома 2 *Сумма и произведение положительных чисел положительны.*

Аксиома 1 говорит, что множество ненулевых элементов поля разбито на два непересекающихся класса и дает этим классам имена. Аксиома 2 выражает основное свойство одного из этих классов.

Теорема 1 *Действительные числа являются упорядоченным полем, или, другими словами, моделью для аксиом упорядоченного поля.*

Доказательство Аксиомы $1-8$ уже проверены. Проверим аксиому 2. По определению, число x положительно, если существует такое $m \in \mathbb{N}$ и такое представление числа $x : (x_k) \sim x$, что $x_k > \frac{1}{m}\ \forall k$. Возьмем два положительных числа x и y, наибольшее из двух соответсвующих m и два представления: $(x_k) \sim x,\ (y_k) \sim y,\ x_k > \frac{1}{m},\ y_k > \frac{1}{m}$. Тогда $(x_k + y_k) \sim x + y,\ x_k y_k \sim xy,\ x_k + y_k > \frac{2}{m},\ x_k y_k > \frac{1}{m^2}$. □

2 Сравнение действительных чисел.

Определение 1 *Число* x *больше (меньше) числа* y, *если* $x-y$ *положительно (соответственно, отрицательно).* **Обозначения:** $x > y$ $(x < y)$.

Для любых двух действительных чисел x и y выполнено одно из трех соотношений: $x > y,\ x < y$ или $x = y$. Это следует из определения и аксиомы 1.

Сложение неравенств.

Предложение 1 *Если* $x < a,\ y < b$, *то* $x + y < a + b$.

Доказательство По определению, $a - x > 0$ и $b - y > 0$. Значит, существуют последовательности $(\alpha_k) \sim a - x$, $(\beta_k) \sim b - y$ и число n такие, что $\alpha_k > \frac{1}{n}$, $\beta_k > \frac{1}{n}$ $\forall$ k. Тогда число

$$(a + b) - (x + y) = (a - x) + (b - y)$$

представлено последовательностью $(\alpha_k + \beta_k)$, причем $\alpha_k + \beta_k > \frac{2}{n}$ $\forall$ k. $\square$

3 Пределы.

Теперь мы можем сравнивать и вычитать любые действительные числа. Это позволяет определить предел последовательности таких чисел.

Определение 2 *Последовательность* (x_k), $x_k \in \mathbb{R}$ *стремится к нулю, если для любого* n *существует* $\mathbb{N}$ *такое, что для каждого* $k > N$

$$|x_k| < \frac{1}{n}.$$

Последовательность $x_k \to x$, *если* $x_k - x \to 0$.

Предложение 2 *Если* $(x_k) \sim x$, *то* $x = \lim_{k\to\infty} x_k$.

Доказательство Возьмем произвольное n и докажем, что существует такое N, что для каждого $k > N$, $|x - x_k| < \frac{1}{n}$. Для этого возьмем N такое, что для любых $k, l > N$,

$$|x_k - x_l| < \frac{1}{2n}.$$

Для любого $k > N$ разность $x - x_k$ представлена последовательностью $(x_l - x_k)$:

$$x - x_k \sim (x_l - x_k).$$

Для любого $l > N$, члены этой последовательности по модулю меньше $\frac{1}{2n}$. Значит,

$$|x - x_k| < \frac{1}{n}.$$

$\square$

4 Полнота вещественных чисел: критерий Коши.

Теорема 2 *Фундаментальная последовательность вещественных чисел имеет предел.*

Из этой теоремы легко следует *критерий Коши*:

Теорема 3 *Последовательность вещественных чисел сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.*

Доказательство теоремы 2. Пусть последовательность $(x_k \in \mathbb{R})$ фундаментальна. Докажем, что тогда она сходится к некоторому числу $x \in \mathbb{R}$. Построим последовательность $(y_k) \sim x$ *диагональным методом.* Каждое из чисел x_k представлено некоторой последовательностью рациональных чисел $x_{kl},\ l \in \mathbb{N}$). Возьмем в этой последовательности такой элемент y_k, что

$$|x_k - y_k| < \frac{1}{k}. \tag{1}$$

Он существует по предложению 2 и в силу фундаментальности последовательности x_{kl}. Докажем, что последовательность рациональных чисел (y_k) фундаментальна.

Возьмем произвольное m и такое $N > m$, что для любых $k, l > N$

$$|x_k - x_l| < \frac{1}{m}.$$

Тогда

$$|y_k - y_l| < \frac{3}{m}.$$

Действительно,

$$|x_k - y_k| < \frac{1}{k} < \frac{1}{N} < \frac{1}{n}.$$

Аналогично

$$|x_l - y_l| < \frac{1}{n}.$$

Следовательно,

$$|y_k - y_l| \leq |y_k - x_k| + |x_k - x_l| + |x_l - y_l| < \frac{3}{n}.$$

Итак, последовательность (y_k) фундаментальна и, значит, представляет некоторое число $x \in \mathbb{R}$.

Докажем, что $x_k \to x$. По предложению 2,

$$x - y_k \to 0.$$

По неравенству (1),

$$y_k - x_k \to 0.$$

Но сумма двух последовательностей, стремящичся к нулю, сама стремится к нулю. □

Итак, мы построили множество действительных чисел и убедились, что оно удовлетворяет аксиомам упорядоченного поля. Теперь действительные числа можно мыслить как точки на прямой и действовать с ними привычным образом, забыв, что мы фактически работаем с классами эквивалентных фундаментальных последовательностей. Значит ли это, что проделанный труд больше не нужен? По счастью, не значит. Построение вещественных чисел как пополнения рациональных почти дословно совпадает с гораздо более общей конструкцией: пополнением метрического пространства. Такие пополнения буквально пронизывают матаматический анализ и будут встречаться вам в разных его частях.

5 Арифметика пределов.

Теорема 4 *Пусть две последовательности имеют пределы. Тогда их сумма, разность, произведение и частное имеют предел, равный сумме, разности, произведению и частному пределов; последнее справедливо, если предел последовательности-знаменателя ненулевой.*

Доказательство Это доказывается так же, как соответствующие утверждения для действительных чисел, и мы опускаем подробности. □