

Досрочная сдача – часть II

Задача 1. Докажите теорему сравнения: если $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \quad |b_n| \leq a_n$, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ тоже сходится.

Задача 2. Сформулируйте и докажите аналогичную теорему из задачи 1 теорему о расходимости.

Задача 3. Сходится ли ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log_2 n}$?

Указание: примените геометрический метод.

Задача 4. Сходится ли ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log_2 n)^2}$?

Задача 5. Верно ли, что пересечение счётного количества открытых всюду плотных множеств на прямой

а) обязательно непусто?

б) всюду плотно на прямой?

Задача 6. Назовём ε -окрестностью множества A объединение ε -окрестностей всех его точек; обозначение: A^ε . Докажите, что если множество $A \subset \mathbb{R}$ замкнуто, то $A = \bigcap_{\varepsilon > 0} A^\varepsilon$.

Задача 7. Пусть $A \subset \mathbb{R}$ – произвольное множество. Что можно сказать о пересечении всех его ε -окрестностей с положительным ε : $B = \bigcap_{\varepsilon > 0} A^\varepsilon$?

Задача 8. Докажите, что множество предельных точек любой последовательности замкнуто.

Задача 9. Дано произвольное замкнутое множество $A \subset [0, 1]$. Постройте последовательность, множество предельных точек которой совпадает с A .

Задача 10. Докажите, что никакой интервал нельзя представить в виде объединения двух непересекающихся открытых подмножеств $\mathbb{R}$.