12.09.2017

Классическая теория поля

Лекция №1

I Рекомендуемая литература.

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, "Теория поля", Курс теор. физики, Том II, М.: Физматлит, 2003.

Это основная книга, содержащая большую часть того, что будет рассказано в курсе. Материал курса соответствует главам 1–6, и 8–9.

2. Дж. Джексон, "Классическая электродинамика", М.: Мир, 1965 г.

Тоже хороший учебник, хорошее изложение материала, большое количество физических приложений. К нашему курсу имеют отношение главы 6, 11 (спец. теор. относительности), 12 (релятивистская динамика частиц), 14 (излучение).

Рекомендуются, также, главы 1–3 –

здесь даётся решение некоторых задач с помощью метода функций Грина.

3. В.С. Владимиров

"Обобщённые функции в математической физике", М.: Наука, 1979 г.
Просто написанная книга по теории обобщённых функций. Позволяет быстро освоить основные понятия и важные примеры (вроде δ-функции Дирака и т.п.).

II Предмет изучения и его особенности

Мы будем изучать классическую динамику полевых теорий, в основном — электродинамику в четырёхмерном пространстве Минковского. Все эти теории имеют 2 основных отличия от того, что изучалось ранее.

1°. Любое поле — это функция $\phi(t, \vec{x})$, где $(t, \vec{x})$ — координаты точки некоторого пространства. В нашем курсе это будет 4-х мерное пространство Минковского. Таким образом, поле - это распределённая система с бесконечным числом степеней свободы. В силу этого динамические уравнения поля будут уравнениями в частных производных в отличие от обыкновенных ДУ механики точечных частиц. Такая ситуация имеет место, например, в гидродинамике жидкости, где основное динамическое уравнение - уравнение Навье-Стокса - уравнение в частных производных на поле скоростей потока жидкости $\vec{v}(t, \vec{x})$.

2° Но, в отличие от гидродинамики, полевые системы существенно релятивистские (т.е. для них характерны высокие скорости распространения сигналов) - например,

скорость распространения =4=
электромагнитных волн в вакууме
равна скорости света (свет - частный
случай электромагнитных волн)

$$c = 299\,792\,458 \, м/с \simeq 3 \cdot 10^8 \, \frac{м}{с}$$

Оказывается, что свойства простран-
ства и времени при движении со
скоростями порядка с сильно отли-
чаются от привычных нам свойств,
принятых в Ньютоновой механике.
Следствием этого является замена
группы симметрий пространства -
времени: вместо группы
Галилея в принцип относительности
вводится группа Пуанкаре.

И ещё одна существенная осо-
бенность полевых моделей
связана с языком описания дина-
мики. В моделях с точечными
частицами можно было (в
принципе) пользоваться аппаратом
Ньютоновой механики (силы,
ускорения, скорости, траектории),

но можно было применять и Лагранжев подход. Уже на этом уровне выявились некоторые преимущества Лагранжева описания, а для полевых моделей лагранжев язык становится единственно возможным; "остатки" сил и траекторий появятся у нас только при описании взаимодействия полей и частиц.

Поэтому нашей ближайшей задачей будет краткое напоминание формализма Лагранжа в случае конечномерных систем классической механики.

Описание какого-либо явления или круга явлений основано на математической модели — сильно упрощенного образа реального мира, в котором, тем не менее, сохранены все существенные факторы, составляющие суть явления.

Обычно для построения модели явления выделяют следующие компоненты:

- Объекты исследования. В классической механике, которую мы изучали до сих пор это были материальные точки и твердые тела – системы материальных точек, расстояние между которыми фиксированы и не меняются в процессе движения.

- Тот или иной набор обобщённых координат; фиксация значений этих координат должна полностью задавать положение объектов, входящих в изучаемую систему, в пространстве. Число независимых обобщённых координат, однозначно фиксирующих положение системы, называется числом степеней свободы.

- Наблюдаемые величины: Выражаются как функции обобщённых координат и скоростей и представляют собой некоторые физические характеристики системы, которые можно измерить экспериментально.

• Динамические уравнения, определяющие эволюцию наблюдаемых во времени.

Лагранжев формализм

Пусть q^α $1 \le \alpha \le N$ - независимые обобщенные координаты системы (число степеней свободы $= N$). Пусть взаимодействие различных частей системы описывается потенциальной энергией $U(q) = U(q^1, \dots, q^N, t)$, а ее кинетическая энергия $T = T(q, \dot{q}, t)$. Тогда лагранжиан системы

$$L(q, \dot{q}, t) = T - U$$

Пользуются следующей терминологией.

Пространство, в котором "живут" переменные q^α — конфигурационное пространство. ~~Ф~~ M. Касательное расслоение TM — фазовое пространство, $\dot{q}^\alpha$ — координаты касательных векторов.

Кинетическая энергия T — почти всегда билинейная форма обобщённых скоростей

$$T = \sum_{\alpha\beta=1}^{n} \frac{1}{2} \dot{q}^\alpha g_{\alpha\beta}(q,t) \dot{q}^\beta$$

Динамические уравнения (в количестве n штук):

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = 0 \quad 1 \le \alpha \le n}$$

— уравнение Эйлера – Лагранжа.

Обычно лагранжиан зависит только от ~~ч~~ обобщённых скоростей, так что уравнение Эйлера – Лагранжа — второго порядка по временной производной от искомого закона движения $\{q^\alpha(t)\}$:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha} = \sum_{\beta=1}^{N} \frac{\partial^2 L}{\partial q^\beta \partial \dot q^\alpha}\dot q^\beta + \sum_{\beta=1}^{N} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot q^\beta \partial \dot q^\alpha}\ddot q^\beta .$$

Это просто следствие опытных фактов. Но иногда (в статике, например) встречаются лагранжианы, зависящие от производных более высокого порядка, чем первая производная $\dot q^\alpha$.

Пример. n частиц в пространстве $\mathbb{R}^3$, взаимодействующих ~~...~~ друг с другом и внешними телами с помощью потенциальных сил. Обобщённые координаты: декартовы координаты каждой частицы:

$$\vec r_i = (x_i^1, x_i^2, x_i^3), \quad 1 \le i \le n.$$

Число степеней свободы $N = 3n$.

Лагранжиан:

$$L = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{2}\dot{\vec r}_i^{\,2} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} U(\vec r_i)}_{\text{вклад внешних сил}} + \underbrace{\sum_{i<j} U(\vec r_i - \vec r_j)}_{\text{Парные взаимод.}}$$

Здесь $\dot{\vec{r}}_i^{\,2} = (\dot{\vec{r}}_i \dot{\vec{r}}_i) = \sum_{\alpha=1}^{3} (\dot{x}_i^\alpha)^2 = 10 =$

Скалярное произведение в декартовых координатах $\mathbb{R}^3$

В данном примере уравнение Эйл.-Л. — обычные уравнения Ньютона:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = -\frac{\partial u}{\partial \vec{r}_i} - \sum_{j \neq i} \frac{\partial u(|r_i - r_j|)}{\partial \vec{r}_i}$$

Насколько однозначен лагранжиан?

$\boxed{У}$ Если $L(q, \dot{q}, t)$ и $\tilde{L}(q, \dot{q}, t)$ дают <u>одни и те же</u> уравнения Эйлера-Лагранжа, то $\exists$ функция $\Lambda(q, t)$ со свойством:

$$(\star) \quad L(q, \dot{q}, t) - \tilde{L}(q, \dot{q}, t) \equiv \frac{d\Lambda(q, t)}{dt}.$$

Обратное утверждение тоже верно: если 2 лагранжиана отличаются на полную производную по времени от ф-ции <u>координат</u> и времени, то порождаемые ими уравнения Эйл.-Л. <u>тождественно</u> совпадают.

Доказательство:
По условию:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \equiv \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde L}{\partial \dot q^\alpha}\right) - \frac{\partial \tilde L}{\partial q^\alpha} \Rightarrow$$

для функции $\varphi = L - \tilde L$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \dot q^\alpha}\right) - \frac{\partial \varphi}{\partial q^\alpha} \equiv 0.$$

$$\sum_{\beta=1}^{N}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^\beta \partial \dot q^\alpha}\dot q^\beta + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \dot q^\beta \partial \dot q^\alpha}\ddot q^\beta\right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial \dot q^\alpha} - \frac{\partial \varphi}{\partial q^\alpha} \equiv 0 \quad (*)$$

В силу независимости $q(t_0)$, $\dot q(t_0)$ и $\ddot q(t_0)$ в фиксированный момент t_0, из тождественного равенства $0 \Rightarrow$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \dot q^\alpha \partial \dot q^\beta} = 0 \quad \forall \alpha, \beta \in \{1, 2, \ldots, N\}.$$

Таким образом, зависимость $\varphi(q, \dot q, t)$ от $\dot q$ не более, чем линейна:

$$\varphi(q, \dot q, t) = \sum_\alpha A_\alpha(q, t)\dot q^\alpha + B(q, t),$$

где $A_\alpha(q, t)$ $1 \le \alpha \le N$ и $B(q, t)$ — произвольные (пока) ф-ции координат и времени. Тождество $(*)$ накладывает на A_α и B дополнительные условия: Если подставить $\varphi = \sum A_\alpha \dot q^\alpha + B$ в тождество (*), то получим:

$$\sum_{\beta=1}^{N}\left(\frac{\partial A_\alpha(q,t)}{\partial q^\beta} - \frac{\partial A_\beta(q,t)}{\partial q^\alpha}\right)\dot q^\beta + \frac{\partial A_\alpha(q,t)}{\partial t} - \frac{\partial B(q,t)}{\partial q^\alpha} \equiv 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial A_\alpha}{\partial q^\beta} = \frac{\partial A_\beta}{\partial q^\alpha} \quad \text{и} \quad \frac{\partial A_\alpha}{\partial t} = \frac{\partial B}{\partial q^\alpha},}$$

Эти соотношения позволяют сделать вывод, что выражение

$$\varphi dt = \left(\sum_{\alpha=1}^{N} A_\alpha \dot q^\alpha + B\right)dt = \sum_{\alpha=1}^{N} A_\alpha dq^\alpha + B dt$$

есть полный дифференциал:

$$\varphi(q,\dot q,t)dt = d(\Lambda(q,t))$$

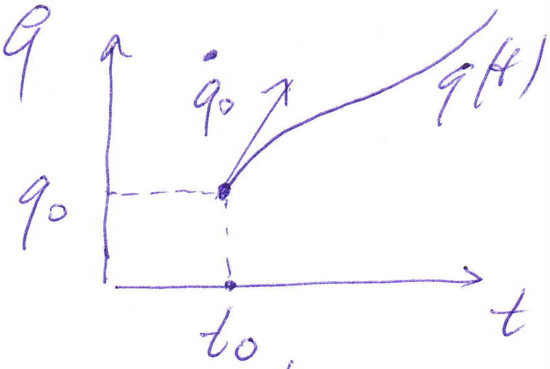
Отсюда следует утверждение теоремы $\varphi = L - \tilde L = \frac{d\Lambda(q,t)}{dt}$.

Обратное утверждение легко проверяется выписыванием уравнений Эйлера-Лагранжа для $L(q,\dot q,t)$ и $\tilde L = L + \frac{d}{dt}\Lambda(q,t)$.

Уравнения Эйлера-Лагранжа имеют второй порядок по временной производной, поэтому нужно задать $2N$ начальных данных:

$$q^\alpha(t_0) = q_0^\alpha \qquad 1 \le \alpha \le N$$
$$\frac{dq^\alpha}{dt}(t_0) = \dot{q}_0^\alpha$$

После этого решение уравнений даёт закон движения $\{q^\alpha(t)\}$:



Другая формулировка Лагранжева подхода имеет дело с граничными условиями.

Для произвольной гладкой траектории $\{q^\alpha(t)\}$ определим функционал действие $S[q(t); t_1, t_2] = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \frac{dq}{dt}, t)\,dt$,

где $t_2 > t_1$ — 2 произвольных фиксированных момента времени.

Зафиксируем положение нашей системы в моменты t_1 и t_2, то есть зададим $2N$ значений обобщённых координат:

$$(**)\quad q^\alpha(t_1) = q_1^\alpha,\ q^\alpha(t_2) = q_2^\alpha \quad 1 \le \alpha \le N.$$

Это не данные задачи Коши, а граничные условия.

Принцип наименьшего действия утверждает, что среди всех возможных траекторий, проходящих через граничные значения $(**)$ истинная траектория, (то есть $\bar{q}^\alpha(t)$, решающие уравнения Эйлера-Лагр.) реализует наименьшее (по крайней мере - экстремальное) значение функционала действия:

$$\delta S[\bar{q}(t)] = 0.$$

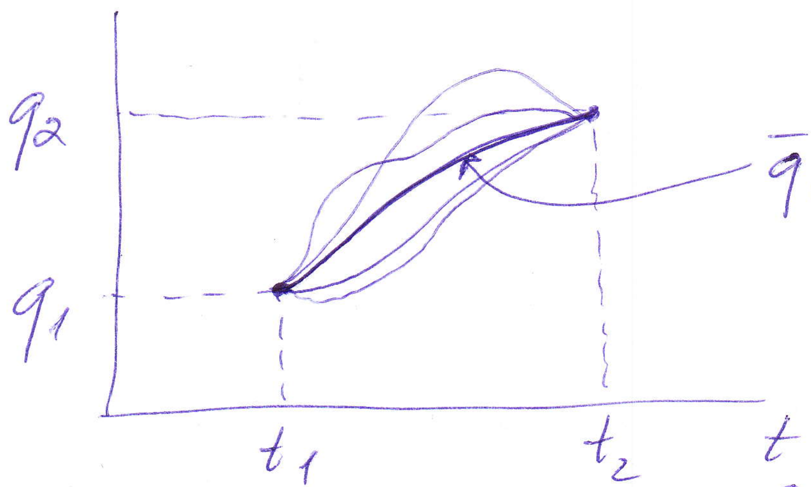
Вариация функционала действия есть по определению линейная по вариации $\delta q^\alpha(t)$ часть приращение функционала S:

$$\Delta S[q(t)] := S[q(t)+\delta q(t)] - S[q(t)] =$$

$$= \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha=1}^{N} Q_\alpha(q,\dot q,t)\,\delta q^\alpha(t)\,dt}_{\delta S[q]} + \left(\begin{array}{c}\text{слагаемые}\\ \text{более высокого}\\ \text{порядка по } \delta q\end{array}\right).$$

приращение

вариация.



Найдём условия, выделяющие $\bar q(t)$, для которой $\delta S[\bar q(t)] = 0$.

Рассмотрим наряду с $\bar q(t)$ близкую траекторию $\bar q(t)+\delta q(t)$. Поскольку все траектории должны удовлетворять граничным условиям (**), то $\delta q^\alpha(t_1) = \delta q^\alpha(t_2) = 0$, а в остальном это произвольные гладкие функции времени.

Тогда по определению вариации:

$$\delta S[\bar{q}(t)] = \left[\int_{t_1}^{t_2} L(\bar{q}+\delta q, \dot{\bar{q}}+\delta\dot{q}, t)\, dt - \int_{t_1}^{t_2} L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)\, dt \right] \Bigg|_{\text{1й порядок по } \delta q^\alpha} =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial q^\alpha}\bigg|_{q=\bar{q}(t)} \delta q^\alpha + \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\bigg|_{q=\bar{q}(t)} \delta \dot{q}^\alpha \right) dt$$

Поскольку $\delta\dot{q}^\alpha = \frac{d}{dt}(\delta q^\alpha)$, то второе слагаемое интегрируем по частям:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \frac{d}{dt}(\delta q^\alpha)\, dt = \sum_{\alpha=1} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \delta q^\alpha \bigg|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\right) \delta q^\alpha.$$

В силу граничных условий $\delta q^\alpha(t_1) = \delta q^\alpha(t_2) = 0$ внеинтегральные слагаемые зануляются и мы получаем для вариации:

$$\delta S[\bar{q}(t)] = \sum_{\alpha=1}^{N} \int_{t_1}^{t_2} \left(-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)}{\partial \dot{q}^\alpha}\right) + \frac{\partial L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)}{\partial q^\alpha} \right) \delta q^\alpha(t)\, dt =$$

$$= 0.$$

В силу произвольности гладких функций $\delta q^\alpha(t)$ мы получаем систему уравнений Эйлера-Лагр для экстремальной траектории $\bar{q}(t)$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L(\bar{q},\dot{\bar{q}},t)}{\partial \dot{q}^\alpha}\right)-\frac{\partial L(\bar{q},\dot{\bar{q}},t)}{\partial q^\alpha}=0.$$

$$1\leq\alpha\leq N.$$
