Темы курсовых работ.
Доцент Ф.Н. Пахомов.
Учебный год 2017–2018.

1. **Модели теории множеств.** Аксиоматическая теория множеств ZFC, аналогично наборам аксиом, известным из алгебры (аксиомы групп, аксиомы полей и т.п.), может изучаться посредством рассмотрения структур удовлетворяющих этим аксиомам — моделей теории множеств. По всем конкретным темам смотри
Т. Йех. Теория множеств и метод форсинга. *М.: Мир*, 1973
T. Jech. Set Theory: The Third Millennium Edition, revised and expanded. Springer Monographs in Mathematics. *Springer Berlin Heidelberg*, 2006

   (a) (1–2 курс, реферативная) *Построение модели теории множеств на основе недостижимого кардинала.* Из второй теоремы Гёделя о неполноте для случая теории множеств следует, что в ZFC нельзя доказать существование модели ZFC. Но есть расширения ZFC аксиомами, утверждающими, что существуют множества столь большой мощности, что в ZFC нельзя доказать их существование — аксиомами больших кардиналов. Самая слабая из известных аксиом такого рода — это аксиома о существовании недостижимого кардинала. Докажите, что из существования недостижимого кардинала следует существование модели теории множеств ZFC.

   (b) (1–2 курс, реферативная) *Построение моделей конечно аксиоматизируемых подтеорий* ZFC. Как упоминалось выше, в ZFC нельзя доказать существование модели всей теории ZFC. Докажите контрастирующее с этим утверждение о том, что для всякой конечно аксиоматизируемой подтеории ZFC, в самой теории ZFC доказуемо, что существует модель этой подтеории.

   (c) (2 курс, реферативная) *Конструктивный универсум и совместность континуум гипотезы.* Докажите теорему Гёделя о том, что конструктивный универсум составляет класс-модель теории множеств в которой выполнена континуум гипотеза.

2. **Счетные ординалы, недоказуемые комбинаторные утверждения и быстрорастущие функции**. Теоремы Гёделя о неполноте дают примеры утверждений, которые нельзя ни доказать ни опровергнуть в данной формальной теории, но эти примеры неестественны с точки зрения обычной математической практики. Тем не менее, можно строить более естественные примеры такого рода. Вопросы о построение конкретных примеров недоказуемых в сильных теориях утверждений тесно переплетены с вопросами о счетных ординалах и быстрорастущих функциях.

   (a) (1 курс, реферативная) *Построение иерархий быстрорастущих функций из счетных ординалов.* Есть несколько методов определения иерархий быстрорастущих функций из натуральных чисел в натуральные: расширенная иерархия Гжегорчика, иерархия Харди и определения через α-рекурсию. В данной работе предполагается разобраться в соотношение этих иерархий.

H.E. Rose. Subrecursion: Functions and Hierarchies. *Oxford University Press*, 1984

(b) (1–2 курс, реферативная) *Теорема Гудстейна и ординал ε_0.* Нужно доказать, теорему Гудстейна с использованием трансфинитной индукции по ординалу ε_0. Далее нужно вычислить значения функции Гудстейна в терминах функций из быстрорастущей иерархии. Материал о самой теоремы Гудстейна довольно легко найти. О связи с расширенной иерархией Гжегорчика можно прочесть в статье:
A. E. Caicedo. Goodstein's function. *Revista Colombiana de Matemáticas*, 41(2):381–391, 2007

(c) (2 курс, реферативная) *Теорема Париса-Харрингтона о недоказуемости в первопорядковой арифметике* PA *модификации конечной теоремы Рамсея.* Нужно доказать теорему Рамсея и принцип Париса Харрингтона, как ее следствие. Далее нужно доказать, что принцип Париса-Харрингтона недоказуем в PA. Это весьма сложная курсовая работа, которая потребует довольно глубокого освоения техники работы с нестандартными моделями арифметики. О теореме Париса-Харрингтона можно прочесть в обзоре Бовыкина, а освоить работу с нестандартными моделями арифметики можно по книге Кея:
A. Bovykin. Brief introduction to unprovability. Logic Colloquium 2006. Lecture Notes in Logic, 38–64, 2009
R. Kaye. Models of Peano Arithmetic. Oxford Logic Guides. 1991

(d) (2–3 курс) *Сравнение методов задания ординала Бахмана-Говарда.* Ординал Бахмана-Говарда — это большой счетный ординал, наиболее естественные определения которого используют так называемые функции ординального коллапса, которые проецируют несчетные ординалы на счетные. В некотором смысле, это столь большой счетный ординал, что для его задания по-существу требуются несчетные множества. В этой работе требуется сравнить системы ординальных обозначений, соответствующие разным определениям ординала Бахмана-Говарада на основе функций ординального коллапса.

(e) (2–3 курс) *Модальные логики и ординалы.* Также я могу предложить несколько вариантов исследовательских работ, связанных с характеризацией ординалов в терминах модальных логик.