Семинар 4

1. Пусть M, L – подпространства векторного конечномерного пространства V. Доказать,что
а) если $M \subset L$, то $\mathrm{Ann}L \subset \mathrm{Ann}M$;
б) $\mathrm{Ann}(M \cap L) = \mathrm{Ann}M + \mathrm{Ann}L$, $\mathrm{Ann}(M + L) = \mathrm{Ann}M \cap \mathrm{Ann}L$.

2. Рассмотрим в R^3 базис $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 1, -1)$, $e_3 = (1, -1, -1)$. Пусть f_1, f_2, f_3 – двойственный базис. Вычислить значение функционала f_i, $i = 1, 2, 3$, на векторе $(0, 1, 0)$.

3. На пространстве многочленов не выше третьей степени с вещественными коэффициентами зададим линейный функционал L_a, $a \in \mathbb{R}$, который на многочлене $p(x)$ принимает значение $p(a)$. Будет ли семейство линейных функционалов L_0, L_1, L_2, L_3 независимым?

4. В векторном пространстве V выбран базис. Доказать ,что первая координата вектора $v \in V$ является линейным функционалом на пространстве V. Указать базис в ядре (=множестве нулей) этого функционала.

Немного труднее:

5. Доказать, что всякий линейный функционал $l(v)$ на векторном пространстве V можно надлежащим выбором базиса привести к виду $l(v) =$ (первая координата вектора v).

6. Если произведение двух линейных функционалов на векторном пространстве тождественно равно нулю, то по крайней мере один из них равен тождественно нулю. Доказать.