Семинар 3

Пусть W_i $(i = 1, 2)$ – подпространства векторного пространства V, $W_1 + W_2 = (x + y, x \in W_1, y \in W_2)$ – сумма подпространств, $W_1 \oplus W_2$ – прямая сумма подпространств, $\mathbb{F}_2$ – поле из двух элементов.

1. Сумма конечного и пересечение любого числа подпространств является подпространством. Доказать.

2. Доказать, что $\dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$.

3. Два подпространства W_1, W_2 называются дополнительными, если $W_1 \oplus W_2 = V$. Доказать, что для этого необходимо и достаточно, чтобы объединение базисов этих подпространств было базисом всего пространства.

4. Пусть $P_n(t)$ – векторное пространство многочленов с вещественными коэффициентами, степень которых не превосходит n. Определим на $P_n(t)$ функцию $F(p) = \frac{dp}{dt}(3)$. Доказать,что F – это линейный функционал на пространстве $P_n(t)$. Найти размерность его ядра и указать какой-нибудь базис ядра.

5. Найти размерность и указать базис пространства решений системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 9x_5 = 0 \end{cases}$$

6. Подпространство векторного пространства ${\mathbb{F}_2}^n$ называется двоичным линейным кодом. Доказать, что либо у всех кодовых векторов сумма координат равна 0, либо этим свойством обладает ровно половина кодовых векторов.

7. Доказать, что от любого базиса векторного пространства можно перейти к любому другому его базису с помощью цепочки элементарных перестроек Гаусса.