Материалы к семинарам по матанализу

4-я неделя (25–29.09.2017)

Краткое содержание лекций

Лекция 5 (27.09.2017)

1. Супремум и инфимум
2. Сходящиеся подпоследовательности
3. Конечные подпокрытия

Лекция 6 (4.10.2017)

1. Открытые множества на прямой
2. Второе определение предела (через окрестности)
3. Плотные множества
4. Структура открытого множества на прямой
5. Предельные точки множества
6. Операции над замкнутыми и открытыми множествами

Примерные задачи семинаров 7 и 8

Вещественные числа

Задача 4.1. Докажите, что сумма и произведение положительных чисел положительны (для изложенной на лекции конструкции $\mathbb{R}$ как множества классов эквивалентности фундаментальных последовательностей в $\mathbb{Q}$).

Предел последовательности

Задача 4.2. Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — две последовательности, причем $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$. Докажите, что

1) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B$,
2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = A \cdot B$,
3) если для любого n верно $b_n \neq 0$, и $B \neq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{A}{B}$.

Супремум и инфимум

Задача 4.3. Докажите, что если у множества есть точная верхняя грань, то она единственна.

Если A и B — два подмножества $\mathbb{R}$, то по определению

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}, \quad AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}.$$

Задача 4.4. Докажите, что если A и B — подмножества $\mathbb{R}$, то

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B, \quad \inf(A + B) = \inf A + \inf B.$$

Более того, если все элементы A и B неотрицательны, то

$$\sup(AB) = \sup A \cdot \sup B, \quad \inf(AB) = \inf A \cdot \inf B.$$

Задача 4.5. Докажите, что существование и единственность точной верхней грани равносильно *аксиоме полноты вещественных чисел:* если X и Y непустые подмножества $\mathbb{R}$, обладающие тем свойством, что для любых элементов $x \in X$ и $y \in Y$ выполнено $x \leqslant y$, то существует такое $c \in \mathbb{R}$, что $x \leqslant c \leqslant y$ для любых элементов $x \in X$ и $y \in Y$.

Задача 4.6* Докажите, что существование и единственность точной верхней грани равносильно *лемме о предельной точке (принципу Больцано—Вейерштрасса):* всякое бесконечное ограниченное числовое множество имеет по крайней мере одну предельную точку.

Сходящиеся подпоследовательности

Нижним пределом последовательности $\{a_n\}$ будем называть величину $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n := \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\geqslant n} a_k$. Аналогично определяется и *верхний предел*, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n := \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\geqslant n} a_k$.

Задача 4.7. Докажите, что $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\limits_n \inf\limits_{k\geqslant n} a_k$ и $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\limits_n \sup\limits_{k\geqslant n} a_k$.

Задача 4.8. Найти верхний и нижний пределы для последовательности $a_n = (-1)^n$.

Задача 4.9. Найти верхний и нижний пределы для последовательности $a_n = n$.

Задача 4.10. Найти верхний и нижний пределы для последовательности $a_n = (-1)^{n-1}\left(2 + \frac{3}{n}\right)$.

Задача 4.11. Найти верхний и нижний пределы для последовательности $a_n = \frac{n-1}{n+1}\cos\frac{2\pi n}{3}$.

Число (или $\pm\infty$) называется *частичным пределом* (*предельной точкой*) последовательности $\{a_n\}$, если у неё есть подпоследовательность, сходящаяся к этому числу.

Задача 4.12. Докажите, что если последовательность сходится, то любая её подпоследовательность имеет тот же предел.

Задача 4.13. Существует ли последовательность, у которой множество предельных точке совпадает с множеством 1) $\{-1, 1\}$, 2) $\mathbb{N}$, 3) множеством дробей вида $1/n$, $n \in \mathbb{N}$, 4) $[0, 1]$?

Задача 4.14. Докажите, что нижний и верхний пределы ограниченной последовательности являются соответственно наименьшим и наибольшим из ее частичных пределов.

Задача 4.15. Докажите, что последовательность имеет предел (возможно, $\pm\infty$) в том и только том случае, если нижний и верхний пределы совпадают.

Задача 4.16. Докажите, что последовательность сходится тогда и только тогда, когда сходятся все её подпоследовательности.

Задача 4.17. Докажите, что если монотонная последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность, то она сходится, причём к тому же пределу.

Задача 4.18. Если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — две последовательности, может ли быть так, что
1) $\varlimsup\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) > \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$?
2) $\varlimsup\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$?
3) $\varlimsup\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) < \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$?

Конечные подпокрытия

Задача 4.19. Приведите пример системы отрезков, покрывающих отрезок, из которых нельзя выбрать конечную подсистему, покрывающую этот отрезок.

Задача 4.20. Приведите пример системы интервалов, покрывающих интервал, из которых нельзя выбрать конечную подсистему, покрывающую этот интервал.

Задача 4.21. Приведите пример системы отрезков, покрывающих интервал, из которых нельзя выбрать конечную подсистему, покрывающую этот интервал.

Задача 4.22* Докажите, что если рассматривать только рациональные числа, то лемма о конечном покрытии неверна.

Рекомендуемые задачи на дом (к 6 октября): 4.4, 4.6, 4.11, 4.16, 4.21.