

1 Принцип наименьшего действия

2 Законы сохранения

3 Интегралы движения и задача Кеплера

Вернемся еще раз к теме интегралов движения.

3.1 Момент импульса

Применим теорему Нетер к вращательной симметрии задачи о движении в центрально-симметричном поле

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 - U(|\mathbf{x}|) \quad (1)$$

для определенности – в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Симметрия задачи очевидна¹ – инвариантность лагранжиана относительно группы поворотов $O(3)$ или преобразований

$$\delta x_i = \epsilon_{ijk} x_j \delta \varphi_k \quad (3)$$

из алгебры Ли $\mathfrak{g} = so(3) \simeq su(2)$, генерируемых векторными полями

$$V_i = -\epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad [V_i, V_j] = \epsilon_{ijk} V_k \quad (4)$$

В этих формулах $\{\epsilon_{ijk}\}$ – набор компонент полностью антисимметричного тензора в трехмерном пространстве \mathbb{R}^3 , а также – структурных констант алгебры Ли, генерирующей его повороты.

¹ Действительно, мы уже рассматривали вращение в двумерной плоскости, которое описывается формулами

$$\begin{aligned} {}^s x_1 - x_1 &= \delta x_1 = s \cdot x_2 + o(s) \\ {}^s x_2 - x_2 &= \delta x_2 = -s \cdot x_1 + o(s) \end{aligned} \quad (2)$$

которое является частным случаем данной формулы при $\delta \varphi_j = s \delta_{j3}$.

Буквальное применение теоремы Нетер сразу дает три интеграла движения

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \epsilon_{ijk} \delta\varphi_j x_k \right) = \sum_j \delta\varphi_j \frac{d}{dt} M_j = 0 \quad (5)$$

$$M_i = \epsilon_{ijk} x_j p_k$$

которые являются компонентами вектора $\mathbf{M} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$. Этот факт совершенно очевиден и непосредственно из уравнений движения

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} &= \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} \\ m\ddot{\mathbf{x}} &= -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} = -U'(|\mathbf{x}|) \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \end{aligned} \quad (6)$$

поскольку

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = m \frac{d}{dt} \mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}} = m \frac{d}{dt} \mathbf{x} \times \ddot{\mathbf{x}} \stackrel{(6)}{=} 0 \quad (7)$$

Сохранение момента импульса $\mathbf{M} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$, который перпендикулярен радиус-вектору частицы \mathbf{x} , означает, что движение происходит все время в плоскости \mathbb{R}^2 , перпендикулярной моменту $\mathbf{x} \cdot \mathbf{M} = 0$, а значит задача редуцируется в $D = 2$. Записав лагранжиан в полярных координатах

$$L = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \right) - U(r) \quad (8)$$

становится очевидным, что $\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$, а значит соответствующий (обобщенный) импульс

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \dot{\phi} = M = \text{const} \quad (9)$$

Очевидно также, что в данной системе сохраняется энергия

$$E = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \right) + U(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r) \quad (10)$$

т.е. избавившись от угловой координаты мы видим, что система стала эквивалентной одномерной системе (на полупрямой $0 < r < \infty$) с потенциалом $U_{\text{eff}}(r) = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2}$, куда вносит вклад центробежная энергия $U_c(r) = \frac{M^2}{2mr^2}$.

3.2 Задача Кеплера

Геометрический смысл формулы (9) представляет собой *второй закон Кеплера*, утверждающий, что “секториальная скорость” при движении в центральном поле сохраняется – где площадь сектора, заметаемого радиус-вектором при движении за бесконечно малый интервал времени dt

$$\frac{1}{2}r \cdot r d\phi = \frac{M}{2m} dt \quad (11)$$

Законы сохранения (9) и (10) при интегрировании дают

$$\begin{aligned} t &= \int dt = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dr}{\sqrt{E - U_{\text{eff}}(r)}} \\ \phi &= \frac{M}{m} \int \frac{dt}{r^2} = \frac{M}{\sqrt{2m}} \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - U_{\text{eff}}(r)}} \end{aligned} \quad (12)$$

явное решение (в смысле, который мы уже обсуждали) поставленной задачи: обратные функции к динамике $r(t)$ и форме траектории в плоскости $r(\phi)$.

При задаче движения в ньютоновском или кулоновском притягивающем потенциале $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$, $\alpha > 0$ (собственно “задаче Кеплера”)

$$U_{\text{eff}}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2} \quad (13)$$

имеет очевидные асимптотические свойства

$$U_{\text{eff}}(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} \infty_+, \quad U_{\text{eff}}(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0_- \quad (14)$$

и единственный минимум

$$r_* = \frac{M^2}{\alpha m}, \quad U_* = -\frac{\alpha^2 m}{2M^2} \quad (15)$$

Уравнения (12) в данном случае интегрируются в явных функциях, что дает например

$$\phi = \frac{M}{\sqrt{2m}} \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{E + \frac{\alpha}{r} - \frac{M^2}{2mr^2}}} = \arccos \frac{\frac{M}{r} - \frac{m\alpha}{M}}{\sqrt{2mE + \frac{m^2\alpha^2}{M^2}}} + \phi_0 \quad (16)$$

где константа интегрирования – просто начало отсчета угла. Это уравнение явно переписывается в виде конического сечения (легко убедиться, переписав в декартовых координатах!) с фокусом в начале координат

$$\frac{A}{r} = 1 + \gamma \cos \phi \quad (17)$$

где $A = \frac{M^2}{m\alpha}$ – параметр, а $\gamma = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}$ – эксцентриситет орбиты.

- При минимальной энергии $E = U_* = -\frac{\alpha^2 m}{2M^2}$ это движение по окружности с радиусом $r = r_* = 1/A$;
- При отрицательных энергиях $U_* \leq E < 0$ движение финитно, траектория – эллипс;
- При $E = 0$ получим $\gamma = 0$ и движение по параболе;
- При $E > 0$ имеем $\gamma > 0$ и движение по гиперболе.

3.3 Смена парадигмы

Ну а пусть теперь $U(r) = 0$, и радиальное одномерное движение происходит в потенциале

$$U_{\text{eff}}(r) = U_c(r) = \frac{M^2}{2mr^2} = \frac{g}{r^2}, \quad g = \frac{M^2}{2m} > 0 \quad (18)$$

Это случай интегрируемого потенциала *модели Калоджеро*. Ожидаемо уравнения (12) интегрируются с результатом

$$t = \int dt = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dr}{\sqrt{E - U_c(r)}} = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{r dr}{\sqrt{Er^2 - g}} \quad (19)$$

или попросту

$$r = \sqrt{\frac{g}{E} + \frac{2E}{m}t^2} \quad (20)$$

Что и естественно было ожидать: ответ представляет собой траекторию движения *свободной* частицы в двумерной плоскости: прямую

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_x t, & y &= y_0 + v_y t \\ v_x^2 + v_y^2 &= \frac{2E}{m} \end{aligned} \quad (21)$$

а константа взаимодействия $g = \frac{M^2}{2m}$ связывается при этом с дополнительным интегралом движения. При этом важно, что

- Движение в системе интегрируемым потенциалом возникает как редукция *свободного* движения в большем числе измерений;
- Это свойство модели Калоджеро сохраняется и для систем многих частиц с потенциалами, имеющими полюс второго порядка:

$$U_c(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{\sin^2(x)}, & x \in S^1 \\ \wp(x), & x \in T^2 \end{cases} \quad (22)$$

Многие свойства интегрируемых систем имеют рациональное, тригонометрическое и эллиптическое воплощения – и при этом ... не продолжают дальше.

3.4 Принцип наименьшего действия

Сегодня при решении задач мы пользовались, в основном, интегралами движения. Вспомним однако, что мы находимся в картине лагранжевой механике, и проверим еще раз “на прочность” принцип наименьшего действия.

Итак, мы выяснили, что свободное движение в двумерии с функцией Лагранжа в полярных координатах

$$L = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \right) \quad (23)$$

приводит к сохранению момента импульса $M = mr^2 \dot{\phi} = \text{const}$ и при редукции на радиальное направление к эффективному одномерному движению с энергией $E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{M^2}{2mr^2}$, сохраняющейся на уравнениях одномерного движения в отталкивающем потенциале Калоджеро, т.е.

$$m\ddot{r} = -U'_c(r) = \frac{M^2}{mr^3} \quad (24)$$

с константой $g = \frac{M^2}{2m} > 0$.

Ну а почему бы не воспользоваться прямо лагранжевой формулировкой? Уравнения ЭЛ для (23)

$$\begin{aligned} m\ddot{r} &= mr\dot{\phi}^2 \\ \frac{d}{dt}mr^2\dot{\phi} &= 0 \end{aligned} \quad (25)$$

и решив второе в виде $\dot{\phi} = \frac{M}{mr^2}$, и подставив это решение прямо в лагранжиан мы получаем

$$\begin{aligned} m\ddot{r} &= mr\dot{\phi}^2 = \frac{M^2}{mr^3} \\ L_{\text{eff}} &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{M^2}{2mr^2} \end{aligned} \quad (26)$$

т.е. ту же систему Калоджеро (24), но ... с другим ($m\ddot{r} = -\frac{M^2}{mr^3}$) знаком?!

- Вроде бы очевидно физически, что правильным уравнением является (24), так как центробежная сила должна отталкивать, а не притягивать.
- Как же тогда быть с принципом наименьшего действия?

Правильный ответ – аккуратно. Вспомним, что мы варьируем действие на траектории, и должны добиваться вообще говоря зануления не только интегрального, но и граничных вкладов. Это означает, в том числе, что решая уравнение на угол, следует аккуратно написать

$$\dot{\phi} = \frac{M}{mr^2}, \quad \phi(t) = \frac{M}{m} \int_0^t \frac{d\tau}{r^2(\tau)} + \phi_0 \quad (27)$$

а стало быть константа M фиксируется условием

$$\phi_1 - \phi_0 = \frac{M}{m} \int_0^T \frac{d\tau}{r^2(\tau)} \quad (28)$$

и при фиксированных граничных значениях угла (или их разности $\theta = \phi_1 - \phi_0$)

$$M = \frac{m\theta}{\int_0^T \frac{dt}{r^2}} \quad (29)$$

сама становится нетривиальным функционалом координаты $r(t)$ на траектории. Подстановка последнего равенства в действие дает

$$L_{\text{eff}} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{M^2}{2mr^2} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{m\theta^2}{2r^2} \left(\frac{1}{\int_0^T \frac{dt}{r^2}} \right)^2$$

$$S_{\text{eff}} = \int_0^T dt L_{\text{eff}} = \int_0^T dt \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{m\theta^2}{2 \int_0^T \frac{dt}{r^2}}$$
(30)

Первый философский вывод таков:

- Все что говорилось о свойствах действия (интеграл от функции Лагранжа, степени не выше двух по первым производным итп) верно только для фундаментальных систем;
- При построении эффективных действий (“интегрировании” по части переменных) это свойство нарушается уже в простейших примерах, эффективные действия могут быть какими угодно;
- Принцип наименьшего действия верен даже там, где нельзя пользоваться уравнениями ЭЛ (это, конечно, еще надо проверить!), т.к. в последней формуле нет “нормального лагранжиана”.

Варьируя (но не пользуясь уравнениями ЭЛ!), получаем

$$\begin{aligned} \delta S_{\text{eff}} &= \int_0^T dt m \dot{r} \delta \dot{r} - \frac{m\theta^2}{2 \left(\int_0^T \frac{dt}{r^2} \right)^2} \int_0^T (-2) \frac{dt}{r^3} \delta r = \\ &= - \int_0^T dt m \ddot{r} \delta r + \frac{m\theta^2}{\left(\int_0^T \frac{dt}{r^2} \right)^2} \int_0^T \frac{dt}{r^3} \delta r = \\ &= - \int_0^T dt m \ddot{r} \delta r + \frac{M^2}{m} \int_0^T \frac{dt}{r^3} \delta r = \int_0^T dt \delta r \left(-m\ddot{r} + \frac{M^2}{m} \frac{1}{r^3} \right) \end{aligned}$$
(31)

или просто – правильные уравнения движения.