КУРС АЛГЕБРЫ, ВШЭ (осень 2017)

ТЕМА 2. Метод Гаусса, системы уравнений, базисы и двойственные базисы.

1. Уравнения гиперплоскостей. Ниже приведены гиперплоскости, заданные **векторами-строчками** из $\mathbb{F}_2^5$ соответствующих матриц. Найти уравнения, задающие эти гиперплоскости.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Число гиперплоскостей с некоторыми дополнительными условиями.

1) Найти все гиперплоскости в $\mathbb{F}_2^n$, которые не содержат ни одного из векторов e_1, e_2, $\ldots$, e_n канонического базиса.

2) Найти число гиперплоскостей в $\mathbb{F}_2^n$, которые не содержат вектор e_1 из канонического базиса.

3) Найти число гиперплоскостей в $\mathbb{F}_2^5$, которые не содержат векторов e_1, e_3 и $e_4 + e_5$.

3. Метод Гаусса и нахождение подпространств $U + V$ и $U \cap V$.

Мы рассматриваем подпространство $V \subset \mathbb{F}_2^5$ (соответственно, U) порожденное **векторами-строчками** матрицы M (соответственно, N).

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Найти размерности подпространств U и V и их базисы.

2) Задать подпространства U и V системами линейных уравнений.

3) Найти размерность подпространства $U + V$ и его базис.

4) Найти размерность подпространства $U \cap V$ и его базис.

4. "Аддитивная" сложность метода Гаусса.

Пусть $V = \langle u_1, \ldots, u_m \rangle \subset \mathbb{F}_2^n$. Найдем базис подпорстранства V методом Гаусса. Оцените число сложений, которые надо при этом выполнить.

5. Соотношения между векторами. Пусть $V = \langle u_1, \ldots, u_m \rangle \subset \mathbb{F}_2^n$. Как описать все линейные соотношения между образующими $(u_1, \ldots, u_m)$ используя линейные уравнения? Найти число всех линейных соотношений, используя $k = \dim V$.

6. Решения систем уравнений.

1) Найти все решения системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_2+x_3+x_4+x_5 &= 0\\ x_1+x_3+x_4+x_5 &= 0\\ x_1+x_2+x_4+x_5 &= 0\\ x_1+x_2+x_3+x_5 &= 0\\ x_1+x_2+x_3+x_4 &= 0. \end{cases}$$

2) Для любого $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) \in \mathbb{F}_2^5$ наити все решения системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_2+x_3+x_4+x_5 &= b_1\\ x_1+x_3+x_4+x_5 &= b_2\\ x_1+x_2+x_4+x_5 &= b_3\\ x_1+x_2+x_3+x_5 &= b_4\\ x_1+x_2+x_3+x_4 &= b_5. \end{cases}$$

Для каких векторов $\bar{b} \in \mathbb{F}_2^5$ эта система уравнений имеет решение?

7. Двойственный базис.

1) Доказать, что матрицы M_1, M_4 и M_{2n} имеют максимальный ранг.

2) Найти двойственный базис к базису, образованному строками матрицы M_1 (соответственно, M_4 и M_{2n}).

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1&1&0&0\\ 0&1&1&0\\ 0&1&1&1\\ 1&0&0&1 \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} 0&1&1&1\\ 1&0&1&1\\ 1&1&0&1\\ 1&1&1&0 \end{pmatrix},$$

$$M_{2n} = \begin{pmatrix} 0&1&1&\dots&1&1\\ 1&0&1&\dots&1&1\\ 1&1&0&\dots&1&1\\ ..&..&..&\dots&..&..\\ 1&1&1&\dots&0&1\\ 1&1&1&\dots&1&0 \end{pmatrix} \in M_{2n\times 2n}(\mathbb{F}_2).$$

8. "Аддитивная" сложность нахождения двойственного базиса. Пусть $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ базис $\mathbb{F}_2^n$. Оценить число сложений, которые надо выполнить в методе Гаусса для нахождения двойственного базиса.

9. Число матриц ранга k.

1) Найти число матриц $M \in M_{3\times 6}(\mathbb{F}_2)$ порядка 3×6, имеющих ранг 3 (соответственно, ранг 2).

2) Найти число матриц $M \in M_{5\times 6}(\mathbb{F}_2)$ порядка 5×6 ранга 2 (соответственно, ранга 3 и 4).

3*) Найти число матриц $M \in M_{m\times n}(\mathbb{F}_2)$ ранга k.

10. Задача к Лемме 1 из Лекции 4. По любому подпространству $U \subset \mathbb{F}_2^n$ мы можем определить "двойственное" к нему подпространство, используя результат Леммы 1:

$$U^0 = \{v \in \mathbb{F}_2^n \,|\, \forall\, u \in U \ (u, v) = 0\}.$$

(Иногда используют обозначение $U^\perp$ для U^0.) Например, $\{\bar{0}\}^0 = \mathbb{F}_2^n$ и $(\mathbb{F}_2^n)^0 = \{\bar{0}\}$. (Проверьте!)

1. Показать, что U^0 подпространство.

2. Записать U^0, используя систему уравнений, и найти его размерность.

3. Найти подпространство $(U^0)^0$.

4. Доказать, что отображение $U \mapsto U^0$ является биективным отображением множества всех подпространств $\mathbb{F}_2^n$ на себя.

5. Доказать, что число подпространств в $\mathbb{F}_2^n$ размерности k равно числу подпространств в $\mathbb{F}_2^n$ размерности $n - k$.