# Лекция 5. Топологические свойства отрезка.

Мы переходим к новому разделу курса:

## Топология прямой

## 1 Предел монотонной ограниченной последовательности.

Основная цель одномерного анализа - изучение функций на прямой. Однако множества и функции тесно связаны между собой. Например, множество меньших значений непрерывной функции всегда открыто (что бы это ни значило). Поэтому изучение подмножеств прямой - тоже естественная часть анализа.

**Определение 1** *Последовательность $(x_n)$ называется строго монотонно возрастающей (убывающей), если в ней каждый член больше (меньше) предыдущего. В обоих случаях последовательность монотонна. Последовательность нестрого или просто монотонна, если в предыдущем определении строгие неравенства заменить на нестрогие.*

**Теорема 1** *Монотонная ограниченная последовательность действительных чисел имеет предел.*

Теорема доказывается с помощью приема, который в математическом фольклоре называется “поимка льва в пустыне”.

Предположим, что пустыня - это отрезок, и лев перемещается по нему. Разделим отрезок пополам, поставим стену посередине и возьмем ту половину, в которой окажется лев. Продолжим процесс по индукции. В конце концов тот отрезок, в который попал лев, окажется размером с клетку - лев пойман.

**Доказательство** Построим последовательность вложенных сжимающихся отрезков $\sigma_n = [a_n, b_n]$ так, что каждый отрезок содержит все члены последовательности, начиная с некоторого:

$$\forall\ n\ \exists\ N : \forall k > N,\ a_k \in \sigma_n. \tag{1}$$

Построение проводим по индукции. Без ограничения общности считаем, что последовательность возрастает; иначе заменим $(x_n)$ на $(-x_n)$.

**База индукции**.Пусть $b$ - верхняя граница последовательности: $b > x_n \forall\ n$. Такое $b$ существует, поскольку последовательность ограничена. Положим: $x_1 = a_1,\ b = b_1,\ \sigma_1 = [a_1, b_1]$. Это заканчивает базу индукции.

**Шаг индукции**. Пусть отрезок $\sigma_n$ со свойством (1) уже построен. Разделим его пополам; пусть $c_n$ его середина. Отрезок $\sigma_n$ содержит все члены, начиная с некоторого. Если левая половина $\sigma_n$ обладает тем же свойством, выберем ее в качестве

$\sigma_{n+1}$.Пусть левая половина не содержит все члены, начиная с некоторого. Возьмем такое $N$, что для каждого $k > N,\ x_k \in \sigma_n$. По предположению, левая половина не содержит некоторого элемента $x_k$ при $k > N$. Значит, все последующие элементы $x_m,\ m > k$ принадлежат правой половине. Действительно, элемент $x_k \in \sigma_n$ при $k > N$ и не принадлежит левой половине; значит, он принадлежит правой, причем $x_k > c_n$. Далее, при $m > k,\ x_m \geq x_k > c_n$ и $x_m \in \sigma_n$. Значит, $x_m$ принадлежит правой половине $\sigma_n$. Возьмем ее за $\sigma_{n+1}$. Это завершает шаг индукции.

Последовательность вложенных отрезков со свойством (1) построена. Их длины стремятся к нулю, поскольку

$$|\sigma_n| = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}.$$

Докажем теперь, что последовательность $(x_n)$ фундаментальна. Возьмем произвольное $\varepsilon$ и $n$ такое, что

$$|\sigma_n| = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} < \varepsilon.$$

Возьмем такое $N$, что $\forall\ k > N,\ x_k \in \sigma_n$. Тогда расстояние между $x_k$ и $x_l$ не больше длины $\sigma_n : |x_k - x_l| \leq |\sigma_n| < \varepsilon$. Значит, последовательность $(x_n)$ фундаментальна. По критерию Коши, она сходится. □

## 2 Вложенные сжимающиеся отрезки.

**Теорема 2** *Последовательность вложенных сжимающихся отрезков имеет общую точку, и притом только одну.*

**Доказательство** Пусть $(\sigma_n)$ - такая последовательность, $\sigma_n \subset \sigma_{n-1},\ |\sigma_n| \to 0$. Положим: $\sigma_n = [a_n,\ b_n],\ b_n > a_n$. Тогда $(a_n) \nearrow,\ (b_n) \searrow$ (читается: $(a_n)$ монотонно возрастает, $(b_n)$ монотонно убывает), и обе последовательности ограничены: $a_n < b_1,\ b_n > a_1$. Пусть

$$x = \lim a_n,\ y = \lim b_n.$$

Но

$$0 = \lim(b_n - a_n) = y - x.$$

Следовательно, $y = x$. Это и есть единственная общая точка отрезков $\sigma_n$. □

## 3 Supremum и infimum

Любое ограниченное множество целых чисел имеет наибольший и наименьший элемент. Верно ли это для действительных чисел? Нет; контрпримером является интервал $(a, b)$. Для любого элемента $x \in (a, b)$ существует меньший элемент того же интервала, а также больший - среднее арифметическое $x$ и $a$ или $b$ соответственно. Однако на интуитивном уровне концы интервала $a$ и $b$ играют роль наибольшего и наименьшего элементов. На формальном языке $a$ - это точная нижняя грань (infimum), а $b$ - это точная верхняя грань (supremum) интервала $(a, b)$.

**Определение 2** *Нижней границей множества $X \subset \mathbb{R}$ называется любое $a$ такое, что*

$$a \leq x \ \forall \ x \in X.$$

*Аналогично определяется верхняя граница $b$:*

$$b \geq x \ \forall \ x \in X.$$

Среди всех границ выделяется "наибольшая" и "наименьшая".

**Определение 3** *Точной нижней гранью, или инфимумом множества $X$ называется такое $a$, что $a$ является нижней границей множества $X$, а никакое $a' > a$ не является. Обозначение:*

$$a = \inf X.$$

*Аналогично определяется точная верхняя грань множества $X$ как наименьшая верхняя грань*

$$b = \sup X.$$

**Теорема 3** *Если у множества существует верхняя граница, то существует и супремум. Аналогично, всякое множество, ограниченное снизу, имеет инфимум.*

Эта теорема, так же, как и следующие две, доказывается методом "поимки льва в пустыне".

**Доказательство** теоремы 3. Мы докажем только первую часть теоремы; вторая доказывается аналогично. Пусть $X$ - данное множество, $a_1$ - его нижняя граница.

Если $a_1 \in X$, то $a_1 = \inf X$. Действительно, любое $a' > a_1$ не является нижней границей для $X$, поскольку $a' > a_1 \in X$.

Пусть теперь $a_1 \notin X$. Мы построим последовательность вложенных сжимающихся отрезков $\sigma_n$, единственная общая точка которых будет искомым инфимумом. Возьмем произвольно $b_1 \in X$ и положим: $\sigma_1 = [a, b]$. Отрезки $\sigma_n$ будем строить по индукции.

База индукции - построение $\sigma_1$ - уже произведена.

**Шаг индукции**. Пусть отрезок $\sigma_n = [a_n, b_n]$ уже построен. Разделим его пополам; пусть $c_n$ - его середина. Если $c_n$ является нижней границей $X$, положим:

$$\sigma_{n+1} = [c_n, b_n] := [a_{n+1}, b_{n+1}].$$

В противном случае положим:

$$\sigma_{n+1} = [a_n, c_n, ] := [a_{n+1}, b_{n+1}].$$

Получим последовательность вложенных сжимающихся отрезков $\sigma_n = [a_n, b_n]$. Пусть $a$ - (единственная) общая точка этих отрезков. Докажем, что она искомая. Левые концы отрезков $\sigma_n$ являются нижними границами множества $X$, а правые - не являются. Докажем, что

$$a \leq x \ \forall \ x \in X.$$

Предположим противне: пусть существует $x \in X : \ x < a$. Заметим, что $a_n \to a, \ a - a_n \to 0$. Для любого достаточно большого $n$, $a - a_n < a - x$. Следовательно,$a_n$ - не нижняя граница - противоречие.

Докажем, что никакое $b > a$ не является нижней границей. Предположим противное: пусть существует нижняя граница $b > a$. Заметим, что $b_n \to a, \ b_n - a \to 0$. Для любого достаточно большого $n, \ b_n < b$. Следовательно, $b_n$ - нижняя граница для $X$. Но это противоречит свойству $b_n$.

Итак, $a = \inf X$. □

# 4 Сходящиеся подпоследовательности.

Существует множество последовательностей, не имеющих предела. Например,

$$a_n = n \text{ или } a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}.$$

Из второй последовательности можно выьрать сходящуюся подпоследовательность:

$$a_{2n} = 1 + \frac{1}{2n}.$$

**Определение 4** Подпоследовательностью *данной последовательности* $\mathbb{N} \to X, \ n \to a_n \in X, \ X$ *- произвольное множество, называется последовательность, которая строится следующим образом. Возьмем произвольную строго возрастающую последовательность натуральных чисел* $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \ k \to n_k$ *и рассмотрим отображение*

$$H : \mathbb{N} \to X, \ h = f \circ g, \ k \mapsto a_{n_k}.$$

*Это отображение называется* **подпоследовательностью** *последовательности* $(a_n)$*.*

**Теорема 4** *Всякая ограниченная последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность.*

Заметим, что для неограниченных последовательностей теорема неверна; контрпример - натуральный ряд.

**Доказательство** теоремы 4 Снова ловим льва в пустыне. Всякая ограниченная последовательность $(x_n)$ лежит на некотором отрезке. Фиксируем любой такой отрезок и обозначим его $\sigma_1$. Построим по индукции последовательность сжимающихся вложенных отрезков $\sigma_k$ и подпоследовательность $x_{n_k} \in \sigma_k$, сходящуюся к единственной общей точке всех отрезков $\sigma_k$.

Пусть $\sigma_1 = [a_1, b_1]$, и $\sigma_k = [a_k, b_k] \subset \sigma_{n-1}$ уже построены, причем $\sigma_k$ содержит бесконечное число членов последовательности $(x_n)$, точнее, члены, соответствующие бесконечному множеству индеков (сама последовательность может содержать лишь конечное число членов, например, быть стационарной). Пусть члены последовательности $(x_n)$, $x_{n_l} \in \sigma_l,\ l = 1, \dots, k$, уже построены.

Разделим отрезок $\sigma_k$ пополам, и возьмем ту его половину, которая содержит бесконечно много членов последовательности $(x_n)$. Выбранную половину обозначим $\sigma_{k+1}$. Возьмем принадлежащий $\sigma_{k+1}$ член последовательности $(x_n)$ с номером $n_{k+1} > n_l,\ l = 1, \dots, k$. Тем самым, построена последовательность отрезков $\sigma_k$ и подпоследовательность $(x_{n_k})$ последовательности $(x_n)$ так, что $x_{n_k} \in \sigma_k$.

Возьмем единственную точку $x \in \cap_1^\infty \sigma_k$. Она является пределом последовательности $x_{n_k}$ - докажите! $\square$

# 5 Конечные подпокрытия.

На остановке автобуса стоит бесконечная толпа людей. Идет дождь, но каждый держит над собой зонтик (закрывающий не только его одного), так что дождь никого не мочит. Приводимая ниже теорема утверждает, что можно оставить открытыми лишь конечное правильно выбранное множество зонтиков, остальные закрыть, и дождь все равно никого не замочит.

**Определение 5** *Покрытие множества $X$ интервалами - это множество интервалов (конечное, счетное или даже несчетное), объединение котороых содержит $X$.*

**Доказательство** Предположим противное и займемся охотой на льва. Пусть $\sigma_1$ - отрезок, покрытый интервалами. Предположим, что из этого покрытия нельзя выбрать конечное подпокрытие. Разделим отрезок $\sigma_1$ пополам, и выберем ту половину, для которой не существует конечного подпокрытия. Если такой половины нет, то каждая из половин допускает конечное подпокрытие. Объединение этих подпокрытий конечно и покрывает весь отрезок, что противоречит предположению.

Построим по индукции последовательность вложенных сжимающихся отрезков $\sigma_n$, каждый из которых не допускает конечного подпокрытия. Пусть $x$ - их единственная общая точка. Она принадлежит некоторому интервалу из нашего покрытия; обозначим его через $u$. Пусть $r$ - расстояние от $x$ до ближайшего конца интервала $u$. Возьмем $n$ столь большим, что длина $\sigma_n$ меньше $r$. Тогда отрезок $\sigma_n$ принадлежит целиком интервалу $u$, поскольку $x \in \sigma_n$. Значит, отрезок $\sigma_n$ допускает конечное подпокрытие (и даже одним интервалом!) - противоречие. $\square$

Доказанные в этой лекции свойства будут играть важную роль в дальнейшем.