19.09.2017 | Классическая теория поля

Лекция № 2

На прошлом занятии мы вспомнили Лагранжев язык в классической механике. А именно, для системы, имеющей N степеней свободы нужно выбрать N независимых обобщённых координат q^α $1 \le \alpha \le N$ (образуют точка конфигурационного пространства) и добавить ещё N обобщённых скоростей $\dot{q}^\alpha$ $1 \le \alpha \le N$ (координаты в слоях касательного расслоения к конфигурационному пространству) и выбрать функцию на фазовом пространстве (с локальными координатами $(q^\alpha, \dot{q}^\alpha)$)

$L(q, \dot{q}, t)$ — Лагранжиан системы.

Динамические уравнения (уравнения Эйлера – Лагранжа):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = 0 \quad 1 \le \alpha \le N,$$

где в левой части в качестве значений $\dot{q}^\alpha$ выбираются компоненты касательного вектора к искомой траектории $q^\alpha(t)$:

$$\dot{q}^\alpha(t) = \frac{dq^\alpha}{dt}.$$

С такой подстановкой уравнения Эйлера-Лагранжа становятся дифф. уравнениями второго порядка на закон движения $\{q^\alpha(t)\}_{1\leq\alpha\leq n}$.

Лагранжев подход имеет ряд преимуществ перед Ньютоновским описанием в терминах сил:

- Сразу получаем необходимое число уравнений
- Легко совершать замены переменных и переходить к другим обобщённым координатам.
- Существуют регулярные методы поиска интегралов движения, т.е. функций на фазовом пространстве $I(q, \dot{q})$ которые не зависят от времени, если вместо q^α подставить решение уравнений Эйлера-Лагранжа, а вместо $\dot{q}^\alpha$ — их производные.

То есть:

$$I\left(q(t), \frac{dq(t)}{dt}\right) = \mathcal{I}(t), \text{ но } \frac{d\mathcal{I}(t)}{dt} = 0,$$

если $q^\alpha(t)$ – решение уравнений Эйлера-Лагранжа.

Проиллюстрируем это ~~утвер~~ двумя важными примерами.

а) Пусть $\mathcal{L}$ не зависит от одной из обобщённых координат q^{α_0} (зависимость от $\dot{q}^{\alpha_0}$ обязательно должна быть, иначе данная степень свободы просто отсутствует).

В этом случае соотв. уравнение Эйлера-Лагранжа даёт:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^{\alpha_0}}\right) = 0$$

Поэтому функция $p_{\alpha_0}(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}^{\alpha_0}}$ (обобщённый импульс, отвечающий координате q^{α_0}) – является интегралом движения, то есть, постоянна на решениях динамических уравнений.

Отметим, что лагранжиан системы (а следовательно и уравнения движений) не изменяется (инвариантен) при преобразованиях

$$q^{\alpha_0} \to q^{\alpha_0} + \varepsilon, \text{ где } \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

Такие сдвиги образуют коммутативную группу преобразований. Более точно наше утверждение можно сформулировать так:

Перейдём к новым ~~~~ обобщённым координатам:

$$\begin{cases} \tilde{q}^{\alpha} = q^{\alpha} & \alpha \neq \alpha_0 \\ \tilde{q}^{\alpha_0} = q^{\alpha} + \varepsilon \end{cases}$$

Тогда уравнение движение в терминах координат $\tilde{q}^{\alpha}$ тождественны по форме прежним уравнениям, записанным в терминах q^{α}.

На уровне лагранжиана:

$$L(q, \dot{q}, t) = L(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, t),$$

где $\dot{\tilde{q}}^{\alpha} = \dot{q}^{\alpha} \ \forall \alpha$.

Это простейший пример преобразования симметрии механической системы.

б) Рассмотрим функцию на фазовом пространстве:

$$E(q,\dot q,t) = \sum_{\alpha=1}^{n} \dot q^{\alpha}\frac{\partial L}{\partial \dot q^{\alpha}} - L(q,\dot q,t) :=$$

$$:= \dot q^{\alpha}\frac{\partial L}{\partial \dot q^{\alpha}} - L$$

Это равенство — соглашение об индексах суммирования. Для сокращения записи мы будем опускать знак Σ и пределы суммирования, если выражение содержит повторяющийся индекс. По повторяющемуся индексу будем подразумевать суммирование по всему допустимому множеству его значений.

Найдём производную по времени от функции $\mathcal{E}(t) = E(q(t), \frac{dq}{dt}, t)$,

где $q(t)$ — решение уравнений Эйлера-Лагранжа.

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot q^\alpha(t)\frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha} - L\right) =$$

$$= \ddot q^\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha} + \dot q^\alpha \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha}\dot q^\alpha(t) -$$

$$- \frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha}\ddot q^\alpha(t) - \frac{\partial L}{\partial t} =$$

$$= \dot q^\alpha \underbrace{\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha}\right)}_{=0\ \forall\alpha,\ \text{т.к. это ур-е Эйл.-Л.}} - \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Таким образом на уравнениях движения: $\frac{dE}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}$ и

если L не содержит <u>явной</u> зависимости от времени, функция

$$E(q, \dot q) = \dot q^\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha} - L$$

является интегралом движения. Эта функция называется энергией механической системы.

Если $L = T - U$, где T – <u>квадратичная</u> форма скоростей $\dot q^\alpha$, то

$$\dot q^\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha} = 2T \Rightarrow \boxed{E = T + U} -$$

сумма кинетической и потенци-

альной энергии.
Заметим, что и в этом случае есть однопараметрическая группа преобразований, оставляющая инвариантными уравнение движения: группа сдвигов начала отсчёта времени:

$$\begin{cases} \tilde{t} = t + \varepsilon \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R} \\ \tilde{q}(\tilde{t}) = q(t) \end{cases}$$

И, поскольку $\dfrac{d(\tilde{q}(\tilde{t}))}{d\tilde{t}} = \dfrac{dq}{dt}$,

$\dfrac{d}{d\tilde{t}} = \dfrac{dt}{d\tilde{t}}\dfrac{d}{dt} = \dfrac{d}{dt}$, то $L\left(\tilde{q}, \dfrac{d\tilde{q}}{d\tilde{t}}\right) = L(q, \dot{q})$

и уравнение движения (ур-я Эйлера-Лагранжа) не изменяются.

Этот факт (наличие сохраняющейся величины и группы однопараметрических преобразований симметрии) носит общий характер и устанавливается первой теоремой Нётер (1918).

$\boxed{\text{Т. Нётер}}$ Пусть имеется группа Ли однопараметрических преобразований вида

$$t \to \tilde{t} = T(q, t, \varepsilon), \quad T(q,t,0) \equiv t$$

$$q^\alpha(t) \to \tilde{q}^\alpha(\tilde{t}) = Q^\alpha(q, t, \varepsilon), \quad Q^\alpha(q,t,0) \equiv q^\alpha,$$

где ε - групповой параметр, при которых уравнения движения системы остаются инвариантными (имеют тот же функциональный вид в переменных $\tilde{q}$, что и в переменных q). Тогда существует интеграл движения, явный вид которого даётся формулой:

$$\boxed{I(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \chi^\alpha(q,t) + \left(L - \dot{q}^\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\right) \tau(q,t) + \lambda(q,t),}$$

где L - лагранжиан системы,

$$\left.\begin{aligned} \chi^\alpha(q,t) &= \left.\frac{dQ^\alpha(q,t,\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \\ \tau(q,t) &= \left.\frac{dT(q,t,\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \end{aligned}\right\}$$ генераторы инфинитезимальных (∞ малых) преобразований группы,

$$\lambda(q,t) = \left.\frac{d\Lambda(q,t,\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}$$ и

$$L(q, \dot{q}, t) = L\left(\tilde{q}(\tilde{t}), \frac{d\tilde{q}}{d\tilde{t}}, \tilde{t}\right) + \frac{d\Lambda(\tilde{q}, \tilde{t}, \varepsilon)}{d\tilde{t}}.$$

Доказательство:

При доказательстве нам будет достаточно учитывать только первый порядок по ε у групповых преобразований:

$$T(q,t,\varepsilon) = t + \varepsilon\tau(q,t) + o(\varepsilon)$$

$$Q^\alpha(q,t,\varepsilon) = q^\alpha(t) + \varepsilon X^\alpha(q,t) + o(\varepsilon)$$

Обозначим для краткости:

$$\varepsilon\tau(q,t) = \Delta_\varepsilon t$$

$$\varepsilon X^\alpha(q,t) = \Delta_\varepsilon q^\alpha,$$

тогда наши преобразования примут вид:

$$\tilde{t} = t + \Delta_\varepsilon t + o(\varepsilon)$$

$$\tilde{q}^\alpha(\tilde{t}) = q^\alpha(t) + \Delta_\varepsilon q^\alpha + o(\varepsilon).$$

Далее, удерживая только первый порядок по ε, имеем соотношения:

$$d\tilde{t} = (1 + (\Delta_\varepsilon t)^{\cdot})dt + o(\varepsilon)$$

$$\frac{d}{d\tilde{t}} = \frac{dt}{d\tilde{t}}\frac{d}{dt} = \frac{1}{\frac{d\tilde{t}}{dt}} \cdot \frac{d}{dt} = (1 - (\Delta_\varepsilon t)^{\cdot})\frac{d}{dt} + o(\varepsilon)$$

Здесь $\dot{A} = \frac{dA}{dt}$ $\forall A$.

Поэтому:

$$\frac{d\tilde{q}^\alpha(\tilde{t})}{d\tilde{t}} = \left(1-(\Delta_\varepsilon t)^\cdot\right)\frac{d}{dt}\left(q^\alpha(t)+\Delta_\varepsilon \tilde{q}^\alpha\right) + |0 = $$

$$+ o(\varepsilon) =$$

$$= \dot{q}^\alpha(t) + (\Delta_\varepsilon q^\alpha)^\cdot - \dot{q}^\alpha(t)(\Delta_\varepsilon t)^\cdot + o(\varepsilon).$$

Рассмотрим действие системы как функционал от истинной траектории движения $q^\alpha(t)$, т.е. от решений уравнения Эйлера–Лагранжа:

$$S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)\,dt, \quad t_2 > t_1,$$

где t_1 и t_2 – два произвольных момента времени. Совершим в функционале $S[q(t)]$ преобразование симметрии из нашей группы: $t \to \tilde{t}$ $q \to \tilde{q}$

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q,\frac{dq}{dt},t)\,dt = \int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} \tilde{L}(\tilde{q}(\tilde{t}),\frac{d\tilde{q}(\tilde{t})}{d\tilde{t}},\tilde{t})\,d\tilde{t}.$$

Воспользуемся тем, что новый Лагранжиан в новых переменных $\tilde{L}(\tilde{q},\frac{d\tilde{q}}{d\tilde{t}},\tilde{t})$ дает те же уравнения Эйлера–Лагранжа, что и $L(q,\dot{q},t)$ (с точностью до обозначений).

Как мы выяснили на прошлой лекции, это означает, что L и $\tilde{L}$ отличаются на полную производную функции координат и времени:

$$\tilde{L}\left(\tilde{q},\frac{d\tilde{q}}{d\tilde{t}},\tilde{t}\right)=L\left(\tilde{q},\frac{d\tilde{q}}{d\tilde{t}},\tilde{t}\right)+\frac{d\Lambda(\tilde{q},\tilde{t})}{d\tilde{t}}.$$

Таким образом:

$$\int_{t_1}^{t_2}L\left(q,\frac{dq}{dt},t\right)dt=\int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2}\left(L\left(\tilde{q},\frac{d\tilde{q}}{d\tilde{t}},\tilde{t}\right)+\frac{d\Lambda(\tilde{q},\tilde{t})}{d\tilde{t}}\right)d\tilde{t}$$

Вернёмся во втором интеграле к переменным q и t и будем следить за первым порядком по ε в следующей разности:

$$0=\int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2}\left(\tilde{L}\left(\tilde{q},\frac{d\tilde{q}}{d\tilde{t}},\tilde{t}\right)+\frac{d\Lambda}{d\tilde{t}}\right)d\tilde{t}-\int_{t_1}^{t_2}L\left(q,\frac{dq}{dt},t\right)dt=$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\Big(L\big(q+\Delta_\varepsilon q,\ \dot{q}+(\Delta_\varepsilon q)^{\cdot}-\dot{q}(\Delta_\varepsilon t)^{\cdot},\ t+\Delta_\varepsilon t\big)+$$
$$+\left(1-(\Delta_\varepsilon t)^{\cdot}\right)\frac{d\Lambda}{dt}\Big)\left(1+(\Delta_\varepsilon t)^{\cdot}\right)dt-\int_{t_1}^{t_2}L\,dt=$$

Заметим, что $\varepsilon=0$ отвечает тождественному преобразованию: =12=

$\Rightarrow$ должно быть $\Lambda(\tilde{q},\tilde{t},\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0}=0$

и разложение Λ начинается с 1го порядка по групповому параметру:

$$\Lambda(\tilde{q},\tilde{t},\varepsilon)=\varepsilon\lambda(q,t)+o(\varepsilon).$$

Поэтому $\dfrac{d\Lambda(\tilde{q},\tilde{t},\varepsilon)}{d\tilde{t}}=\left(1-(\Delta_\varepsilon t)^{\cdot}\right)\dfrac{d}{dt}\left(\varepsilon\lambda+o(\varepsilon)\right)=$

$$=\varepsilon\frac{d\lambda(q,t)}{dt}+o(\varepsilon).$$

Преобразуем разность:

$\Delta L\equiv$

$\equiv L(q+\Delta_\varepsilon q,\dot{q}+(\Delta_\varepsilon q)^{\cdot}-\dot{q}(\Delta_\varepsilon t)^{\cdot},t+\Delta_\varepsilon t)\left(1+(\Delta_\varepsilon t)^{\cdot}\right)-L(q,\dot{q},t)=$

$$=\frac{\partial L}{\partial q^\alpha}\cdot\Delta_\varepsilon q^\alpha+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^\alpha}\left((\Delta_\varepsilon q^\alpha)^{\cdot}-\dot{q}^\alpha(\Delta_\varepsilon t)^{\cdot}\right)+$$

$$+\frac{\partial L}{\partial t}\Delta_\varepsilon t+L(q,\dot{q},t)(\Delta_\varepsilon t)^{\cdot}+o(\varepsilon).$$

Воспользуемся тем, что $q^\alpha(t)$ – решение уравнений Эйлера-Лагранжа $\Rightarrow$

$\Rightarrow\dfrac{\partial L}{\partial q^\alpha}\equiv\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{q}^\alpha}\right)$. Это позволяет объединить в полную производную по времени 2 подчёркнутых слагаемых и наша разность примет вид:

$$\Delta L = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha}\Delta_\varepsilon q^\alpha\right) + \underline{\frac{\partial L}{\partial t}\Delta_\varepsilon t + L(\Delta_\varepsilon t)^{\cdot}} - \frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha}\dot q^\alpha(\Delta_\varepsilon t)^{\cdot} + o(\varepsilon). \quad (\star)$$

Учтем теперь следующие:

$$\frac{d}{dt}(L\Delta_\varepsilon t) = L(\Delta_\varepsilon t)^{\cdot} + \Delta_\varepsilon t\left(\underline{\frac{\partial L}{\partial q^\alpha}\dot q^\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha}\ddot q^\alpha + \frac{\partial L}{\partial t}\right) = \underline{L(\Delta_\varepsilon t)^{\cdot}} + \Delta_\varepsilon t\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha}\right)\dot q^\alpha + \Delta_\varepsilon t\frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha}\ddot q^\alpha + \underline{\Delta_\varepsilon t\frac{\partial L}{\partial t}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\frac{\partial L}{\partial t}\Delta_\varepsilon t + L(\Delta_\varepsilon t)^{\cdot}} = \frac{d}{dt}(L\Delta_\varepsilon t) - \Delta_\varepsilon t\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha}\right)\dot q^\alpha - \Delta_\varepsilon t\frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha}\ddot q^\alpha$$

Учитывая последнее слагаемое в $(\star)$, получим, что ΔL превратилась в <u>полную производную по времени</u>:

$$\Delta L = \frac{d}{dt}\left(\Delta_\varepsilon q^\alpha\frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha} + \Delta_\varepsilon t\left(L - \dot q^\alpha\frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha}\right)\right) + o(\varepsilon).$$

Возвращаясь к разности двух выражений для действия, мы видим, что для любых 2х моментов времени t_2 и t_1:

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\varepsilon X^\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha} + \varepsilon \tau \left(L - \dot q^\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha} \right) + \varepsilon \lambda(q,t) \right) + o(\varepsilon).$$

Поделим обе части на ε и устремим $\varepsilon \to 0$. Интеграл от полной производной вычисляется по формуле Ньютона-Лейбница и мы получаем

$$I\left(q(t), \frac{dq}{dt}, t\right)\Big|_{t=t_1} = I\left(q(t), \frac{dq}{dt}, t\right)\Big|_{t=t_2}$$

$$\rightarrow \boxed{I = X^\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha} + \tau\left(L - \dot q^\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot q^\alpha}\right) + \lambda(q,t)}$$

не зависит от времени на траекториях движения системы, то есть, является интегралом движения.

Простой, но важный пример.

Свободная частица в $\mathbb{R}^3$:

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} -$$

– радиус-вектор частицы в декартовых координатах, $\dot{\vec{r}}^2 := (\dot{\vec{r}}, \dot{\vec{r}}) = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$.

Система имеет три степени свободы.

а) L не зависит от координат x, y и z $\Rightarrow$ сохраняются все три компоненты импульса:

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}}; \quad p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = Const_x$$

$$p_y = \underbrace{m\dot{y}}_{= Const_y} \quad p_z = m\dot{z} = Const_z$$

б) L не зависит явно от t $\Rightarrow$

Энергия $E = \dot{\vec{r}}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} - L = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2}$ – сохраняется. Это не независимый интеграл движения в данном примере, т.к.

$$E = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) = \frac{\vec{p}^2}{2m}$$

в). L инвариантен относи-
тельно <u>вращений</u> в $\mathbb{R}^3$.

Группа вращений $\mathbb{R}^3$ есть подгруппа ортогональных вещественных матриц размера 3×3 с единичным детерминантом:
$$\begin{cases} M\cdot M^T = \mathbb{1} \\ \det M = 1 \end{cases}$$

Пусть $M(\varepsilon)$ — однопараметрическая подгруппа вращений вокруг фиксированной оси: $M(0)=\mathbb{1}$, $M(\varepsilon_1)M(\varepsilon_2) = M(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$.

Матрица $\omega = \left.\frac{dM}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}$ — элемент алгебры Ли <u>нашей</u> группы:

$M(\varepsilon)M^T(\varepsilon) = \mathbb{1} \Rightarrow$ Дифф. по ε и кладём $\varepsilon=0$:
$$\omega M^T(0) + M(0)\omega^T = 0,$$ и поскольку $M(0)=\mathbb{1}$:
$$\omega + \omega^T = 0 -$$
— алгебра Ли группы вращений $\mathbb{R}^3$ образована антисимметрическими матрицами размера 3×3.

Воспользуемся теоремой Нётер =17= и найдём вид интегралов движения, отвечающих вращательной симметрии:

$$\vec{\rho} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Так обозначим новый радиус-вектор.

Или, в компонентах:

$$\rho_i = \sum_{j=1}^{3} M_{ij} r_j \equiv M_{ij} r_j$$

Соглашение о Σ.

Здесь $r_1 = x$, $r_2 = y$ $r_3 = z$.

L не меняется при таких преобразованиях: $r_i = M^T_{ij} \rho_j \Rightarrow \dot{r}_i = M^T_{ij} \dot{\rho}_j$

$$\Rightarrow (\dot{\vec{r}}, \dot{\vec{r}}) = \dot{r}_i \dot{r}_i = M^T_{ij} \dot{\rho}_j M^T_{ik} \dot{\rho}_k =$$

$$= \underbrace{(M M^T)}_{=\mathbb{I}}{}_{kj} \dot{\rho}_j \dot{\rho}_k = \dot{\rho}_i \dot{\rho}_i = (\dot{\vec{\rho}}, \dot{\vec{\rho}})$$

$$\Rightarrow \lambda(\vec{r}, t) = 0.$$

$$\rho_i = M_{ij}(\varepsilon) r_j = r_i + \varepsilon \underbrace{\omega_{ij} r_j}_{\chi_i} + O(\varepsilon)$$

Время не затрачивается =>

=> $\tau = 0$

Получаем интеграл движения:

$$I = X_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \dot{\tau}_i} = \sum_{i,j=1}^{3} m \dot{\tau}_i \omega_{ij} \tau_j$$

Не все эти интегралы движения независимы. В алгебре Ли удобно выбрать базис:

$$\omega_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \omega_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \omega_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда получим 3 интеграла движения (компоненты момента импульса):

$$I_x = m \dot{\tau}_i (\omega_x)_{ij} \tau_j = m(y\dot{z} - z\dot{y}) = yp_z - zp_y$$

$$I_y = m \dot{\tau}_i (\omega_y)_{ij} \tau_j = zp_x - xp_z$$

$$I_z = m \dot{\tau}_i (\omega_z)_{ij} \tau_j = xp_y - yp_x$$

Или, в векторном виде,

$$\boxed{\vec{I} = [\vec{\tau} \times \vec{p}].}$$

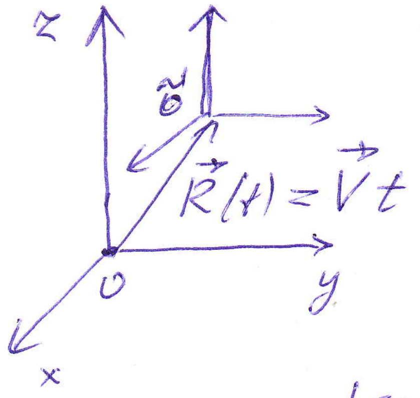
Отметим, что 3 интеграла I_x, I_y и I_z зависимы от p_x, p_y и p_z. Действительно, если $\vec{p} = m\dot{\vec{r}} = const$, то

$$\vec{r}(t) = \frac{\vec{p}}{m} + \vec{r}_0\,, \quad \vec{r}_0 = \vec{r}(0) \text{ — начальное положение.}$$

И тогда $\vec{I}(t) = [\vec{r} \times \vec{p}] = [\vec{r}_0 \times \vec{p}] = const$

Таким образом, компоненты $\vec{I}$ есть <u>линейные комбинации</u> компонент $\vec{p}$.

г) Рассмотрим еще переход в инерциальную систему отсчета, движущуюся равномерно и прямолинейно относительно исходной со скоростью $\vec{V}$. Оси координат будем считать параллельными соответствующим осям исходной системы. (Этого всегда можно добиться поворотом R^3).



$$\vec{\rho} = \vec{r} - \vec{V}t$$

↑ радиус-вектор частицы в новой системе координат $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ с началом в $\tilde{O}$.

Положим $\vec V = \varepsilon \vec v$, где ε – групповой параметр преобразования.

Теперь $X_i = -v_i t$: $\rho_i = r_i + \varepsilon X_i$

Время $\tilde t = t$ – <u>не затрагивается</u> рассматриваемым преобразованием.

В этом примере L меняется на полную производную:

$$\vec r = \vec \rho + \varepsilon \vec v t$$

$$L(\vec r, \dot{\vec r}) = \frac{m\dot{\vec r}^2}{2} = \underbrace{\frac{m\dot{\vec \rho}^2}{2}}_{L(\vec\rho,\dot{\vec\rho})} + \underbrace{\varepsilon m(\dot{\vec r}\vec v)}_{\varepsilon\frac{d}{dt}(\underbrace{m\vec r\vec v}_{\lambda(\vec r,t)})} + o(\varepsilon)$$

Таким образом, интеграл движения имеет вид:

$$J(\vec r, \dot{\vec r}, t) = X_i \frac{\partial L}{\partial \dot r_i} + \lambda =$$

$$= -m(\dot{\vec r}\vec v)t + m(\vec r\vec v) = Const$$

Учитывая, что $m\dot{\vec r} = \vec p$, получаем:

$$(m\vec r - \vec p t)\cdot \vec v = Const.$$

Поскольку $\vec{v}$ — $\forall$ вектор, имеем 3 интеграла движения:

$$m\vec{r} - \vec{p}t = m\vec{r}_0 = const$$

Но, как легко видеть, это опять просто один раз проинтегрированная связь $m\dot{\vec{r}} = \vec{p} = const$.

Итак, ~~свободная частица~~ свободная частица как динамическая система инвариантна относительно 10 параметрической группы преобразований

1) Сдвиг времени $\tilde{t} = t + \varepsilon$

2) 3 сдвига вдоль осей координат (трансляции $\mathbb{R}^3$): $\vec{\rho} = \vec{r} + \vec{R}$

3) Вращения пространства $\mathbb{R}^3$ — 3 параметра: $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$

$M(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z) = \exp(\alpha_x \omega_x + \alpha_y \omega_y + \alpha_z \omega_z)$

4) Переход в движущуюся инерциальную систему отсчёта: ещё 3 параметра V_x, V_y и V_z:

$$\vec{\rho} = \vec{r} - \vec{V}t.$$

Данная группа преобразований называется группой Галилея и все фундаментальные модели классической нерелятивистской механики обязательно включают эту группу в группу своих симметрий.

Согласно теореме Нётер, 10 параметрическая группа Галилея дает 10 интегралов движения. Но, как показывает пример свободной частицы, не все они функционально независимы.

$\boxed{\text{Упражнение}}$ Найдите все независимые интегралы движения в модели 2х частиц с гравитационным взаимодействием (задача Кеплера):

$$L = \frac{m_1 \dot{\vec{r}}_1^{\,2}}{2} + \frac{m_2 \dot{\vec{r}}_2^{\,2}}{2} + \frac{\alpha}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|},$$

$\alpha > 0$ — параметр взаимодействия.