Материалы к семинарам по матанализу

5-я неделя (2–6.10.2017)

Краткое содержание лекций

Лекция 6 (4.10.2017)

1. Открытые множества на прямой
2. Второе определение предела (с помощью окрестностей)
3. Плотные множества
4. Структура открытого множества
5. Предельные точки
6. Операции над замкнутыми и открытыми множествами

Примерные задачи семинаров 9 и 10

Сходящиеся подпоследовательности

Задача 5.1. Докажите, что каждая ограниченная последовательность имеет верхний и нижний пределы.

Задача 5.2. Пусть последовательность $\{a_n\}$ ограничена, а $\{b_n\}$ сходится к $b \geq 0$. Докажите, что тогда $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(a_n b_n) = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Открытые множества на прямой

Задача 5.3. Объясните, почему интервал является открытым множеством, а отрезок — нет.

Задача 5.4. Почему конечное объединение интервалов является открытым множеством?

Задача 5.5. Докажите, что счетное объединение интервалов является открытым множеством.

Задача 5.6. Объясните, почему конечное пересечение интервалов является открытым множеством, а счётное — не всегда.

Задача 5.7. Почему пустое множество открыто?

Задача 5.8. Докажите, что дополнение к канторову множеству открыто.

Второе определение предела

Задача 5.9. Докажите, используя второе определение предела, что если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$. Докажите аналогичные утверждения для произведения и частного последовательностей.

Задача 5.10. Придумайте такие определения окрестностей ∞, $+\infty$ и $-\infty$, чтобы определение для $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $+\infty$ и $-\infty$ в терминах окрестностей совпадало с классическим определением соответствующего предела.

Плотные множества

Задача 5.11. Является ли $\mathbb{Q}$ плотным? Будет ли плотным $\mathbb{Q} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$, где $x_i \in \mathbb{Q}$?

Задача 5.12. Является ли плотным множество рациональных чисел вида $\dfrac{p}{2^n}$?

Задача 5.13. Является ли канторово множество плотным?

Предельные точки

Задача 5.14. Почему множество, состоящее из одной точки, не имеет предельных точек?

Задача 5.15. Является ли 0 предельной точкой канторова множества?

Задача 5.16. Приведите пример бесконечного множества без предельных точек.

Задача 5.17. Приведите пример бесконечного множества с а) одной, б) двумя предельными точками.

Задача 5.18. Докажите, что множество предельных точек множества замкнуто.

Задача 5.19*. Начнём с какого-нибудь множества A_0, и пусть A_1 — множество его предельных точек, A_2 — множество предельных точек A_1 и т.д. Приведите пример такого множества A_0, что A_{100} непусто, а A_{101} пусто. Приведите пример, когда все A_n непусты, однако их пересечение пусто. Может ли такое быть для ограниченного A_0?

Замкнутые множества

Задача 5.20. Замкнуто ли множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел? Множество $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ иррациональных чисел?

Задача 5.21. Являются ли множетсва

$$A = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}, \quad B = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

замкнутыми?

Задача 5.22. Докажите, что канторово множество замкнуто.

Задача 5.23. Докажите, что множество корней многочлена замкнуто.

Задача 5.24. Может ли замкнутое множество, отличное от всей числовой прямой, быть плотным?

Задача 5.25. Может ли быть так, что A замкнуто, и $A \setminus \{x_1, x_2, \dots\}$, где $x_i \in A$, $i \in \mathbb{N}$, по-прежнему замкнуто?

Задача 5.26. Докажите, что объединение множества с множеством его предельных точек (так называемое замыкание множества) замкнуто.

Задача 5.27*. Рассмотрим множество чисел на отрезке $[0, 1]$, в десятичной записи которых цифра 8 встречается а) конечное число раз; б) бесконечное число раз; в) не встречается ни разу. Будут ли эти множества открыты? замкнуты? плотны?

Операции над замкнутыми и открытыми множествами

Задача 5.28. Пусть A открытое, а B — замкнутое множества. Докажите, что $A \setminus B$ открыто. Будет ли это верно, если вместо одного B мы рассмотрим счетное количество замкнутых множеств B_i и множество $\dots(((A \setminus B_1) \setminus B_2) \setminus B_3)\dots$?

Задача 5.29. Пусть A замкнутое, а B — открытое множества. Докажите, что $A \setminus B$ замкнуто. Будет ли это верно, если вместо одного B мы рассмотрим счетное количество открытых множеств B_i и множество $\dots(((A \setminus B_1) \setminus B_2) \setminus B_3)\dots$?

Задача 5.30. Докажите, что любое открытое множество является (конечным или счетным) объединением интервалов, концы которых — рациональные числа.

Задача 5.31. Докажите, множество $[0, 1)$ не является ни замкнутым, ни открытым, но представляется в виде объединения замкнутых множеств или пересечения открытых.

Задача 5.32. Приведите пример замкнутого множества, являющегося счётным пересечением открытых.

Задача 5.33*. Докажите, что любое замкнутое множество можно представить в виде счётного пересечения открытых, а любое открытое — в виде счётного объединения замкнутых.

Рекомендуемые задачи на дом (к 13 октября): 5.6, 5.12, 5.16, 5.25, 5.30.