

- 1 Принцип наименьшего действия
- 2 Законы сохранения
- 3 Интегралы движения и задача Кеплера
- 4 Дифференциальные формы
- 5 Уравнения Гамильтона

Перейдем, наконец, собственно – к формализму Гамильтона.

5.1 Преобразование Лежандра

Вспомним как мы строили интеграл энергии для консервативной системы, хотя для того, что сейчас будет сделано совершенно необязательно, чтобы $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$.

- Для каждой обобщенной координаты (на многообразии M) введем ее канонический импульс

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, \dots, N \quad (1)$$

По теореме о неявной функции эти уравнения можно разрешить относительно скоростей, если матрица гессиана

$$h_{ij}(q, \dot{q}) = \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \quad (2)$$

является невырожденной $\det h \neq 0$. Поэтому лагранжианы с невырожденным гессианом называют также невырожденными: очевидный пример положительно определенного невырожденного гессиана $h_{ij}(q, \dot{q}) = g_{ij}(q)$ – риманова метрика на M .

- Построим функцию Гамильтона по формуле, которой мы пользовались для интеграла энергии

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L \quad (3)$$

и которая (в более общем контексте) называется преобразованием Лежандра.

Важнейшей для дальнейшего формулой является *дифференциал* преобразования Лежандра

$$\begin{aligned} dH &= \sum_i \left(\dot{q}_i dp_i + p_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i \right) = \\ &\stackrel{(1)}{=} \sum_i \left(\dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i \right) \end{aligned} \quad (4)$$

Из “мастер-формулы” (4) следует практически все, что мы можем сказать о преобразовании Лежандра, а также о функции и уравнениях Гамильтона. Последнее замечание здесь – по циклическим координатам никакого преобразования делать и не нужно.

5.2 Канонические уравнения Гамильтона

Из формулы (4) немедленно следует

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = 1, \dots, N \quad (5)$$

а второе слагаемое в правой части на уравнениях ЭЛ дает

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (6)$$

т.е. его можно переписать в виде

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, N \quad (7)$$

Таким образом система уравнений ЭЛ может быть переписана в виде системы уравнений первого порядка (5), (7). Одной из изначальных целей

гамильтонова формализма было желание переписать уравнения ЭЛ второго порядка в виде системы уравнений первого порядка, что и сделано в формулах (5), (7), как говорят на *фазовом* пространстве с координатами (p, q) . Отметим, что более точно канонические уравнения Гамильтона следует писать как

$$\dot{q} = \left. \frac{\partial H}{\partial p} \right|_q, \quad \dot{p} = - \left. \frac{\partial H}{\partial q} \right|_p \quad (8)$$

т.е. функцию Гамильтона - энергию надо выразить через координаты и импульсы ¹.

Заметим еще раз, что при выводе нигде на самом деле не использовалась независимость лагранжиана от времени, поэтому все формулы остаются верными при $L = L(q, \dot{q}; t)$. При этом конечно возникает явно зависящая от времени функция Гамильтона $H = H(p, q; t)$, полная производная по времени которой

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \stackrel{(5),(7)}{=} \frac{\partial H}{\partial t} \quad (9)$$

равна частной производной в силу канонических уравнений Гамильтона. При независимости от времени функции Лагранжа (а стало быть и Гамильтона) мы получаем из этого закон сохранения энергии.

5.3 Примеры

Для лагранжиана движения в потенциальном поле имеем стандартным образом

$$\begin{aligned} L(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - U(q) \\ p &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m \dot{q} \\ h_{ij} &= \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} = m \delta_{ij} \end{aligned} \quad (10)$$

¹“Упорядочение” (p, q) – алфавитный порядок, хотя казалось бы q главнее p . В дальнейшем мы поймем, что это – несущественно, т.к. в гамильтоновом формализме разности между p и q фактически нет.

т.е. гессиан невырожден (в общем случае – массовая матрица или метрика $m_{ij} = g_{ij}(q)$), поэтому уравнения на скорости элементарно разрешаются

$$\dot{q} = \frac{p}{m} \quad (11)$$

через обратную массовую матрицу. Таким образом, очевидно получаем

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + U(q) \quad (12)$$

гамильтониан для частицы в потенциальном поле, приводящий к каноническим уравнениям

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial U}{\partial q} \quad (13)$$

первое из которых в данном случае банально совпадает с (11). Для произвольной метрики (или массовой матрицы) имеем

$$H(p, q) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} g^{ij}(q) p_i p_j + U(q) = \frac{1}{2} \langle p, p \rangle_g + U(q) \quad (14)$$

где скалярное произведение в пространстве импульсов V^* определяется *обратной* матрицей к римановой метрике, определяющей скалярное произведение в пространстве V касательных векторов или скоростей.

В случае магнитного поля

$$\begin{aligned} L(q, \dot{q}) &= \frac{1}{2} m \dot{q}^2 + A_i(q) \dot{q}_i \\ p_i &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = m \dot{q}_i + A_i(q) \end{aligned} \quad (15)$$

и решение для скоростей имеет вид

$$\dot{q}_i = \frac{1}{m} P_i = \frac{1}{m} (p_i - A_i(q)) \quad (16)$$

Функция Гамильтона при этом имеет вид

$$H(p, q) = \frac{P^2}{2m} = \frac{1}{2m} (p - A(q))^2 \quad (17)$$

такой же как у *свободной* частицы, но со сдвинутым на вектор-потенциал импульсом (16). Это важнейшее свойство “минимальности” электромагнитного взаимодействия (“удлинение” импульса, или, после квантования – производной), и оно универсально для всех проявлений электромагнитного поля в природе.

5.4 Геометрический смысл

С геометрической точки зрения преобразование Лежандра (3) строит по функции Лагранжа $L(q, \dot{q}) : TM \mapsto \mathbb{R}$ на касательном расслоении функцию Гамильтона $H(q, p) : T^*M \mapsto \mathbb{R}$ на *кокасательном* расслоении. Действительно, импульсы (1) можно рассматривать как компоненты вектора в двойственном к касательному пространству, а саму формулу (3) переписать в виде

$$\begin{aligned} H(p, q) &= \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}) \right)_{\dot{q}=\dot{q}(q,p)} = \\ &= \sup_v (\langle p, v \rangle - L(q, v)) \end{aligned} \quad (18)$$

где $v \in V$ – элемент касательного слоя, а скобка задает спаривание между касательным слоем и ему двойственным пространством ($p \in V^*$) – линейных функционалов на V . Кокасательное расслоение T^*M и является (в данном случае!) фазовым пространством \mathcal{M} динамической системы с функцией Гамильтона (3).

Преобразование Лежандра (для хорошего класса лагранжианов и гамильтонианов) является *инволюцией*

$$L \xrightarrow{\mathcal{L}} H \xrightarrow{\mathcal{L}} L \quad (19)$$

Действительно, формулу (3) можно переписать в виде

$$L = \sum_i p_i \dot{q}_i - H \quad (20)$$

дифференциал которой

$$\begin{aligned} dL &= \sum_i \left(p_i d\dot{q}_i + \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i \right) = \\ &\stackrel{(5)}{=} \sum_i \left(p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i \right) \stackrel{(1)}{=} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i \right) \end{aligned} \quad (21)$$

в силу канонических уравнений очевидным образом совпадает с дифференциалом функции Лагранжа.

5.5 Принцип наименьшего действия

Из свойств преобразования Лежандра следует, что принцип наименьшего действия можно переформулировать в форме Гамильтона. Для действия имеем

$$S = \int_0^T dt L = \int_0^T dt \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - H(q, p) \right) \quad (22)$$

Вариация действия в этой форме немедленно приводит к каноническим уравнениям Гамильтона (5), (7)

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_0^T dt \sum_i \left(\delta p_i \dot{q}_i + p_i \delta \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right) = \\ &= \int_0^T dt \sum_i \left(\delta p_i \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) - \delta q_i \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \right) + \sum_i p_i \delta q_i \Big|_0^T \end{aligned} \quad (23)$$

следующими из зануления интеграла вдоль траектории при произвольных вариациях δq и δp , дополненным граничными условиями

$$\delta q_i \Big|_0^T = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (24)$$

только на координаты (но не на импульсы). Это обстоятельство окажется довольно существенным в квантовой механике.

5.6 Принцип Мопертюи и геодезические

Для консервативной системы, т.е. когда энергия сохраняется, принцип наименьшего действия можно переформулировать или упростить. Действительно, на уравнении

$$H(p, q) = E = \text{const} \quad (25)$$

гамильтоново действие (22) можно переписать как

$$S = \int_0^T dt \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - H(q, p) \right) = \int_0^T dt \sum_i p_i \dot{q}_i - ET \quad (26)$$

и экстремали действия на траекториях с постоянной энергией совпадают с траекториями “укороченного действия”

$$S_0 = \int_0^T dt \sum_i p_i \dot{q}_i = \int_{q_0}^{q_T} \sum_i p_i dq_i \quad (27)$$

определенного как интеграл на гиперповерхности (единичной коразмерности) или $(2N - 1)$ -мерной поверхности (25) в фазовом-пространстве.

Из этого следует принцип Мопертюи, который довольно странным образом обобщает науку о геодезических. Вспомним общий вид квадратичного по производным лагранжиана

$$L_g = \frac{1}{2} \sum_{i,j} g_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (28)$$

вариация которого приводит к уравнению геодезической. То же самое уравнение возникает при вариации действия

$$S_g = \int_0^T dt \sqrt{g_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j} = \int_{q_0}^{q_T} \sqrt{g_{ij}(q) dq_i dq_j} \quad (29)$$

являющимся просто геометрической длиной траектории. Какая связь у этого с (27)?

Напишем условие (25) для квадратичной теории в потенциале

$$\frac{1}{2} \sum_i p_i \dot{q}_i + U(q) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} g_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j + U(q) = E \quad (30)$$

которое можно переписать в виде

$$dt = \frac{\sqrt{g_{ij}(q) dq_i dq_j}}{\sqrt{2(E - U(q))}} \quad (31)$$

откуда

$$\begin{aligned} S_0 &= \int_0^T dt \sum_i p_i \dot{q}_i = \int_{q_0}^{q_T} \frac{g_{ij}(q) dq_i dq_j}{dt} = \\ &= \int_{q_0}^{q_T} \sqrt{2(E - U(q))} g_{ij}(q) dq_i dq_j \end{aligned} \quad (32)$$

т.е. минимизация укороченного действия эквивалентна поиску геодезических для многообразия с эффективной метрикой

$$G_{ij}^{\text{eff}}(q) = (E - U(q)) g_{ij}(q) \quad (33)$$

Похожие рассуждения возникают и в релятивистской механике.

5.7 Симплектическая геометрия фазового пространства

Кокасательное расслоение T^*M является примером симплектического многообразия: четномерного многообразия ($\dim T^*M = 2N$, если $\dim M = N$), оснащенного замкнутой 2-формой – в данном случае

$$\omega = \sum_i dp_i \wedge dq_i, \quad d\omega = 0 \quad (34)$$

где $d = dq_i \frac{\partial}{\partial q_i} + dp_i \frac{\partial}{\partial p_i}$ – внешний дифференциал на T^*M . Координаты (q, p) называются при этом координатами Дарбу.

Определение: Симплектическим многообразием называется четномерное многообразие \mathcal{M} , $\dim \mathcal{M} = 2N$, оснащенное невырожденной замкнутой, положительно определенной 2-формой ω :

$$d\omega = 0, \quad \det \omega \neq 0, \quad \underbrace{\omega \wedge \dots \wedge \omega}_N > 0 \quad (35)$$

Примеры:

- $\mathcal{M} = T^*M$, в частности $\mathcal{M} = \mathbb{R}^{2N}$ с формой $\omega = \sum_{i=1}^N dx_{2i-1} \wedge dx_{2i}$;
- $\mathcal{M} = S^2$, $\omega = \sin \theta d\theta \wedge d\phi$, $N = 1$. Этот пример существенен, так как двумерная сфера S^2 не является кокасательным расслоением к чему-бы то ни было.
- Обобщение предыдущего примера на $N > 1$ уже не вполне тривиально: $\mathcal{M} = \mathbb{P}^N$ – комплексное проективное пространство с симплектической формой

$$\omega = \frac{i}{2} \frac{\sum_{i=1}^N dz_i \wedge d\bar{z}_i}{\left(1 + \sum_{j=1}^N |z_j|^2\right)^2} \quad (36)$$

являющейся вещественной частью кэлеровой формы Фубини-Штуди.

Задача: Написать явно матрицу симплектической формы на $\mathcal{M} = T^*M$ в координатах Дарбу

$$\|\omega\| = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (37)$$

где, $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$ – “очевидные” матрица размера $N \times N$. Очевидно, что обратная матрица существует, и совпадает с ней – с точностью до знака

$$\|\Omega\| = \|\omega\|^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \quad (38)$$

а канонические уравнения Гамильтона на координаты $\{x\} = \{(p, q)\}$ можно переписать в виде

$$\dot{x} = \xi_H(x) = \Omega dH, \quad \text{ог} \quad \dot{x}^i = \xi_H^i(x) = \sum_j \Omega^{ij} \frac{\partial H}{\partial x_j} \quad (39)$$

где dH – дифференциал функции Гамильтона на фазовом пространстве.

Геометрический смысл уравнения (39) очень простой, производная координаты на фазовом пространстве задается векторным полем “специального вида”, выражающимся через производную некоторой функции $H = H(x)$ на \mathcal{M} . Такие векторные поля называются гамильтоновыми.

5.8 Теорема Лиувилля

Рассмотрим любую область в фазовом пространстве $D \subset \mathcal{M}$ и ее объем

$$V = \int_D dx = \int_D dpdq \quad (40)$$

Назовем гамильтоновым потоком однопараметрическую группу преобразований $U_t : \mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}$

$$U_t : (p, q) \mapsto (p(t), q(t)) \quad (41)$$

фазового пространства, генерируемую каноническими уравнениями Гамильтона (5), (7) или (39).

Теорема Лиувилля: Объем любой области фазового пространства сохраняется при гамильтоновой динамике.

Действительно, для производной объема верно соотношение

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{t=0} = \int_D \operatorname{div} \xi_H dx \quad (42)$$

следующее из разложения

$$x(t) = U_t x = x + t\xi_H + O(t^2) \quad (43)$$

при $t \rightarrow 0$ и формулы для якобианов

$$V(t) = \int_{D(t)} dx(t) = \int_D \frac{\partial x(t)}{\partial x} dx = \int_D (1 + t \operatorname{div} \xi_H) dx + O(t^2) \quad (44)$$

где

$$\operatorname{div} \xi_H = \sum_i \frac{\partial \xi_H^i}{\partial x^i} \quad (45)$$

поскольку для любой матрицы A

$$\det(1 + tA) \underset{t \rightarrow 0}{=} 1 + t \operatorname{Tr} A + O(t^2) \quad (46)$$

Для гамильтонова векторного поля (39) (например, в координатах Дарбу) очевидно, что $\sum_i \frac{\partial \xi_H^i}{\partial x^i} = 0$.

Вообще, поскольку гамильтоновы потоки сохраняют симплектическую форму (проверить!)

$$\omega(t) = \sum_i dp_i(t) \wedge dq_i(t) = \sum_i dp_i \wedge dq_i = \omega \quad (47)$$

то сохраняются все, выраженные через нее, “интегральные величины”.