

КУРС АЛГЕБРЫ, ВШЭ (осень 2017)

Задачи для подготовке к первой контрольной работе (04.10.2017).

I-1) Найти базис пространства решений системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

I-2) Найти число решений системы неоднородных линейных уравнений для произвольного $(b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{F}_2^4$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = b_1 \\ x_1 + x_3 = b_2 \\ x_1 + x_2 + x_4 = b_3 \\ x_2 + x_3 + x_4 = b_4. \end{cases}$$

I-3) Найти число решений системы неоднородных линейных уравнений для произвольных $a, c, b_1, b_2, b_3, b_4 \in \mathbb{F}_2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = b_1 \\ x_1 + cx_2 + x_3 = b_2 \\ x_1 + x_2 + x_4 = b_3 \\ ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 = b_4. \end{cases}$$

II. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{5 \times 6}(\mathbb{F}_2).$$

1) Найти ранг матрицы и базис подпространства $L_A \subset \mathbb{F}_2^6$, порожденного строками матрицы A .

2) Задать подпространство L_A системой линейных уравнений.

3) Найти базис ядра линейного отображения

$$\mathcal{A} : \mathbb{F}_2^6 \rightarrow \mathbb{F}_2^5, \quad \underline{X} \mapsto A \cdot \underline{X}$$

- 4) Найти размерность и базис образа линейного отображения \mathcal{A} .
5) Задать образ $\mathcal{A}(\mathbb{F}_2^6)$ системой линейных уравнений.

III. Найти двойственный базис к базису, образованному строками матрицы M_1 . В случае матрицы M_2 дополните строки матрицы до базиса и найдите двойственный базис

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

IV. Мы рассматриваем подпространство $V \subset \mathbb{F}_2^5$ (соответственно, U), порожденное векторами-строками матрицы M (соответственно, N)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ d & 1 & 0 & c & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти размерность подпространства $U \cap V$ и его базис.