

Первая проверочная работа по алгебре от 06.10, 15:30–16:50.

1. а) Дать определение линейной зависимости векторов.

б) Рассмотрим 5 векторов в \mathbb{F}_2^5 , заданные пятью строчками матрицы A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Эти пять векторов линейно зависимы? Если да, то найти линейное соотношение между ними; если нет, то доказать независимость.

2. Рассмотрим линейное отображение $\mathcal{A} : \mathbb{F}_2^5 \rightarrow \mathbb{F}_2^5$, $\underline{X} \mapsto A \cdot \underline{X}$, где \underline{X} вектор-столбец из \mathbb{F}_2^5 . (Формула для A дана в Упр. 1).

а) Найти размерности ядра и образа отображения \mathcal{A} .

б) Найти базис ядра отображения \mathcal{A} .

с) Найти базис образа отображения \mathcal{A} .

д) Найти систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство $\text{Im } \mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathbb{F}_2^5)$.

е) Для любых $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 \in \mathbb{F}_2$ найти **число** решений системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_5 = b_1 \\ x_1 + x_4 = b_2 \\ x_2 + x_3 + x_5 = b_3 \\ x_1 + x_5 = b_4 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = b_5. \end{cases}$$

3. Пусть $U \subset \mathbb{F}_2^5$ линейная оболочка пяти векторов-строчек матрицы A из Упражнения 1, а $V \subset \mathbb{F}_2^5$ линейная оболочка пяти векторов-строчек матрицы

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти размерность и базис подпространства $U \cap V$.

4. а) Найти число подпространств размерности два и три в \mathbb{F}_2^5 .

б) Найти число подпространств V_2 и V_3 размерности 2 и 3 в \mathbb{F}_2^5 таких, что $V_2 + V_3 = \mathbb{F}_2^5$.

с⁺) Найти число подпространств U_3 и V_3 размерности 3 в \mathbb{F}_2^5 таких, что $U_3 + V_3 = \mathbb{F}_2^5$.