

Материалы к семинарам по матанализу

6-я неделя (9–13.10.2017)

Краткое содержание лекций

Лекция 7. Непрерывные функции (11.10.2017)

1. Два определения непрерывной функции и их эквивалентность
2. Арифметика непрерывных функций
3. Теорема о промежуточном значении
4. Максимум и минимум на отрезке
5. Равномерная непрерывность

Лекция 8. Компактные множества (18.10.2017)

1. Компактные множества: определение и примеры
2. Критерий компактности: замкнутость ограниченность
3. Пересечение вложенных компактов
4. Конечное подпокрытие
5. Непрерывные функции на компакте

Примерные задачи семинаров 11 и 12

Непрерывность и графики функций

Задача 6.1. Докажите, что функции $f(x) = x$ непрерывна на \mathbb{R} .

Задача 6.2. Докажите, что функции $f(x) = x^2$ непрерывна на \mathbb{R} .

Задача 6.3. Докажите, что функция $f(x) = \sin x$ непрерывна на \mathbb{R} .

Задача 6.4. Нарисуйте замыкания графиков функций $f(x) = \operatorname{sign}(x)$ и $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

Задача 6.5. Докажите, что ограниченная функция на замкнутом множестве непрерывна тогда и только тогда, когда ее график замкнут.

Задача 6.6. Пусть ограниченная функция $f(x)$ определена на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, и замыкание ее графика биективно проектируется на ось $Ox : (x, y) \mapsto x$. Докажите, что $f(x)$ непрерывно продолжается на \mathbb{R} .

Задача 6.7. Что можно сказать про утверждение из предыдущей задачи, если заменить в нем $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ на \mathbb{Q} ?

Задача 6.8. Сформулируйте определение понятия $f(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow x_0$.

Задача 6.9. Нарисуйте график $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$.

Задача 6.10. Нарисуйте график $f(x) = \frac{1}{x}$.

Задача 6.11. Нарисуйте график $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

Задача 6.12. Нарисуйте график $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

Задача 6.13. Нарисуйте график $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$.

Задача 6.14. Нарисуйте график $f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$.

Задача 6.15. Определите точки разрыва функции $f(x) = \frac{x}{\sin x}$.

Задача 6.16. Постройте пример всюду разрывной функции, квадрат которой есть функция, непрерывная на прямой.

Задача 6.17* Докажите, что функция Римана

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n}, \text{ где } m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} - \text{взаимно простые числа,} \\ 0, & x \text{ иррационально} \end{cases}$$

разрывна при каждом рациональном значении x и непрерывна при каждом иррациональном значении x . Постройте эскиз ее графика.

Липшицевость и равномерная непрерывность функций

Функция на прямой (отрезке, интервале) удовлетворяет условию Липшица (липшицева), если существует такое L , что для любых x, y из области определения $f(x)$ выполнено условие $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$.

Задача 6.18. Докажите, что функция, липшицева на отрезке, непрерывна.

Задача 6.19. Докажите, что функция $f(x) = x^2$ на отрезке липшицева, а на прямой – нет.

Задача 6.20. Докажите, что функция $f(x) = P_n(x)$, где P_n – произвольный многочлен степени n , на отрезке липшицева, а на прямой – нет.

Задача 6.21. Докажите, что функция $f(x) = \sin x$ на прямой липшицева, и найдите соответствующую константу Липшица L .

Задача 6.22. Докажите, что липшицевы функции равномерно непрерывны.

Задача 6.23. Приведите пример непрерывной, но не липшицевой функции.

Задача 6.24. Приведите пример непрерывной, но не равномерно непрерывной функции на интервале.

Рекомендуемые задачи на дом: 6.6, 6.7, 6.11, 6.12, 6.14, 6.15, 6.18, 6.20, 6.22.