Листок 2

Задача 1. Вводя новые переменные $u = 1/y^2$ и $t = x$ преобразуйте уравнение

$$y' + 2xy = 2x^3y^3$$

к уравнению на функцию $u(t)$ и решите его.

Задача 2. Вводя новые переменные $t = x - y$ и $u = x + y$ преобразуйте уравнение

$$2y'' + (x + y)(1 - y')^3 = 0$$

к уравнению на функцию $u(t)$ и решите его.

Задача 3. Вводя новые переменные $x = u + t$, $xy = t$ преобразуйте уравнение

$$xy'' + (2 - 4x)y' - 4y = 0$$

к уравнению на функцию $u(t)$ и решите его.

Задача 4. Пусть функция $b(x, y)$ квазиоднородна степени n с весами α и β, то есть

$$b(e^{\alpha\tau}x, e^{\beta\tau}y) = e^{n\tau}b(x, y).$$

Докажите, что поле направлений уравнения $y' = b(x, y)$ на области

$$\{(x, y)\colon\ x > 0,\ y > 0\}$$

инвариантно относительно группы преобразований $g^\tau(x, y) = (e^{\alpha\tau}x, e^{\beta\tau}y)$ тогда и только тогда, когда $n = \beta - \alpha$.

Задача 5. Пусть в условиях предыдущей задачи $n = \beta - \alpha$. Найдите замену, которая преобразует уравнение $y' = b(x, y)$ в уравнение с разделяющимися переменными. В каких координатах разделяются переменные в уравнении $y' = xy^2 + x^3y^3$?

Задача 6. Какие из следующих векторных полей на прямой можно перевести друг в друга диффеоморфизмом:

$$(2\sin x)\partial x, \quad (\sin^2 x)\partial x, \quad (\sin 2x)\partial x?$$

Задача 7. Найдите все векторные поля на плоскости, которые коммутируют с полем: (a) $\frac{\partial}{\partial x}$, (b) $2\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}$.