26.09.2017 | Классическая теория поля | =1=

Лекция №3

На прошлой лекции мы построили (с помощью т. Нётер) сохраняющиеся величины, которые произошли от инвариантности механической системы относительно 10-параметрической группы преобразований Галилея:

- Пространственные трансляции в $\mathbb{R}^3$ (перенос точки начала координат)
- Пространственные вращения $\mathbb{R}^3$ – выбор ориентации осей координат
- Сдвиги начала отсчёта времени.

  $t \to \tilde{t} = t + t_0$

- Переход в инерциальную систему отсчёта, двигающуюся с постоянной $\vec{V}$ относительно исходной инерциальной системы отсчёта:

  $\vec{r} \to \vec{r}\,' = \vec{r} + \vec{V} t.$

Требование инвариантности механической системы относительно группы Галилея отражает фундаментальные свойства окружающего мира: однородность и изотропность пространства, однородность времени (отсутствие привилегированного выделенного момента времени) и независимость течения времени от перемещений в пространстве.

Фактически, инвариантность относительно преобразований из группы Галилея было постулатом нерелятивистской механики и отражало полную эквивалентность и физическую неотличимость инерциальных систем отсчёта (принцип относительности Галилея).

Однако во второй половине 19-го века был достигнут значительный прогресс в описании электромагнитных и оптических явлений – была создана классическая электродинамика и написать дифференциальные уравнения Максвелла, определяющие эволюцию электромагнитного поля и его взаимодействие с заряженными частицами. Эти уравнения прекрасно согласовывались с данными экспериментов и предсказывали новые явления (в частности, существование электромагнитных волн в отсутствие зарядов и токов, породивших эти волны). Несмотря на первоначальную критическую реакцию на теорию электромагнитных волн, вскоре их существование было экспериментально подтверждено в опытах Герца.

Проблема, однако, заключалась в том, что уравнения Максвелла <u>не были</u> инвариантны относительно преобразований из группы Галилея. В частности, они предсказывали скорость электромагнитных волн равного скорости света $c = 3\cdot10^8$ м/с безотносительно к системе отсчёта, что резко противоречило закону сложения скоростей классической механики.

В этот период времени (1855–1864 годы — период создания теории Максвелла) была твердо установлена волновая природа света (в опытах по интерференции и дифракции световых волн). Согласно представлениям, навеянным механическими аналогиями, любой волновой (колебательный) процесс требует наличия некоей среды — переносчика колебаний.

Поэтому была выдвинута гипотеза эфира — некоторой "упругой" среды, заполняющей всё пространство, колебания которой и воспринимаются нами как световые волны. Эфир должен весьма слабо взаимодействовать с веществом, из которого состоят тела материалького мира, поскольку движение этих тел очень точно описывались Ньютоновой механикой, в которой, естественно, никакого эфира не было.

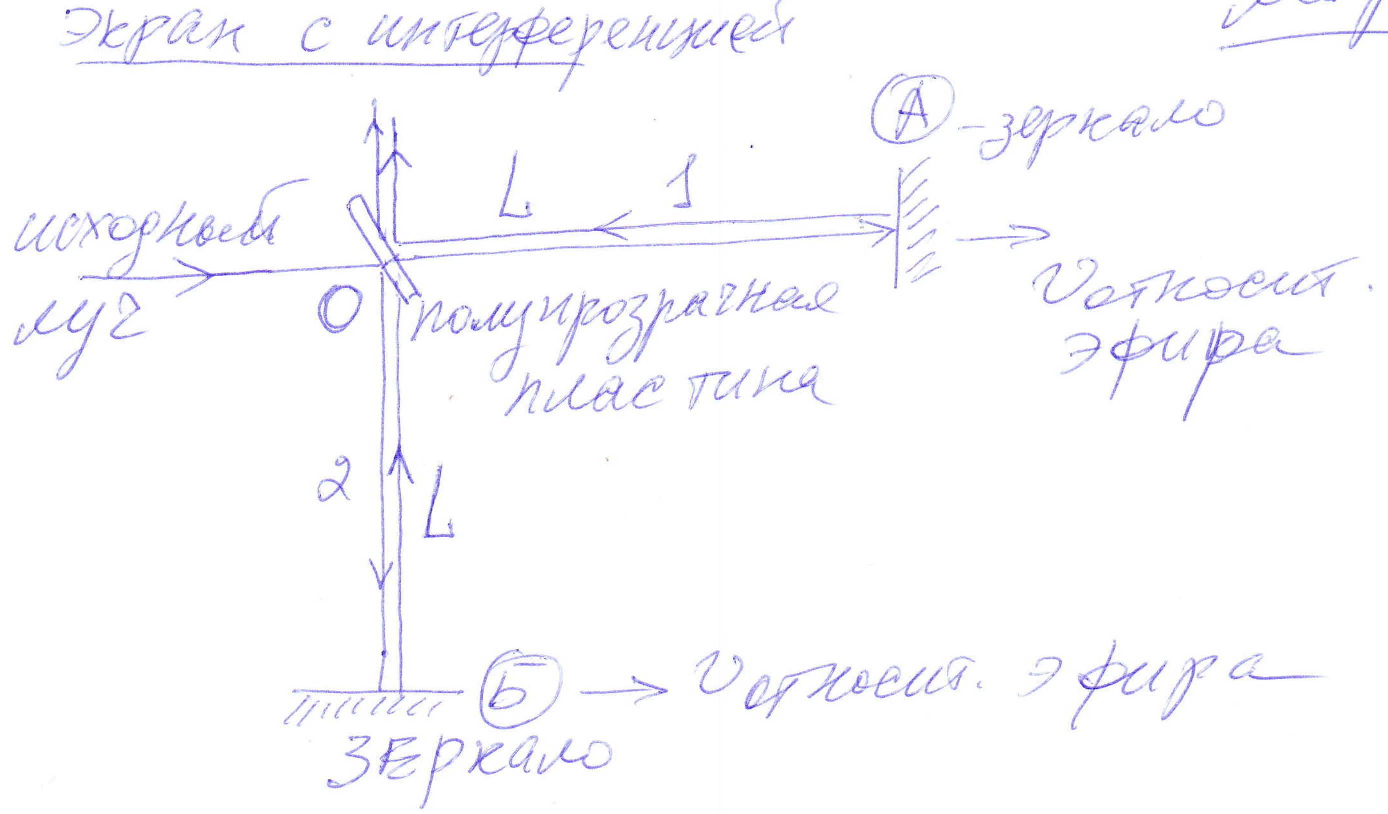
Теперь, если предположить, что уравнения Максвелла записаны в выделенной системе отсчета, которая покоится относительно эфира, то можно понять посто-янство скорости света: это ско-рость распространения колебаний эфира в системе, где он покоится.

Но Земля участвует в круговом вращении вокруг Солнца и, как следствие, не может всё время в течение года покоится относи-тельно эфира. Попытка обнаружить движение Земли относительно эфира была предпринята Альбертом Майкельсоном и Эдвардом Морли в 1887 году.

Идея опыта заключалась в следующем. Пусть Земля в данный момент движется относительно Эфира со скоростью $\vec{v}$:

Если выпустить свет вдоль v и против v, то его скорость относительно Земли будет разной: $c-v$ в 1м случае и $c+v$ во втором (т.к. скорость света в покоящемся эфире всегда c). Эту разницу можно обнаружить интерференционными методами.

СХЕМА опыта Майкельсона–Морли.

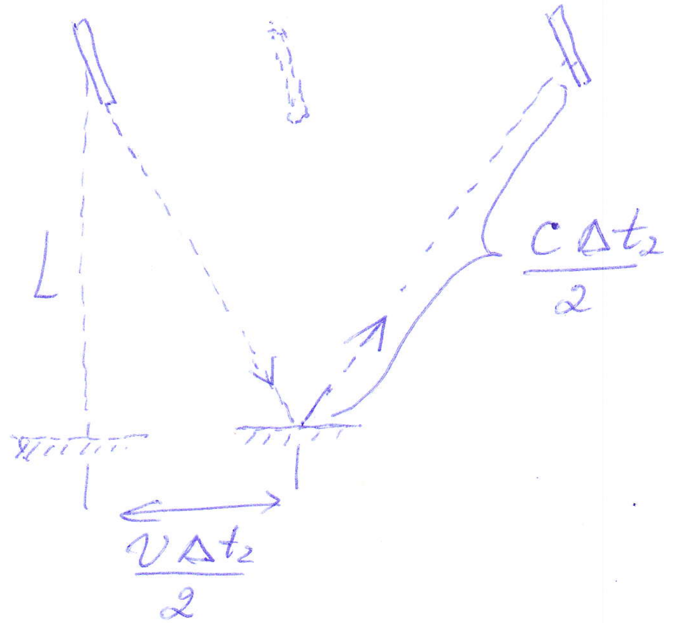


Расстояния $OA = L = OБ$ выравнивались с высокой точностью с помощью микрометрических винтов. Вследствие движения всей установки относительно эфира вместе с Землей, время прохождения света по пути 1 и обратно (путь OAO) отличалось от времени на пути 2:

$$\Delta t_1 = \frac{L}{c-v} + \frac{L}{c+v} = \frac{2Lc}{c^2 - v^2} = \frac{\left(\frac{2L}{c}\right)}{1 - \frac{v^2}{c^2}} -$$

– Это время на пути OAO.

Время Δt_2 находится так:



$$\Rightarrow L^2 + \left(\frac{v\Delta t_2}{2}\right)^2 = \left(\frac{c\Delta t_2}{2}\right)^2$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta t_2 = \frac{\frac{2L}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} =$$

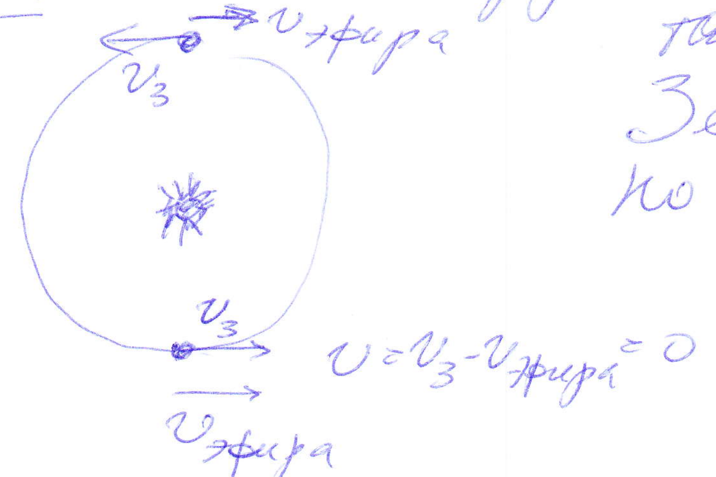
$$= \Delta t_1 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < \Delta t_1!$$

При малых $\frac{v}{c}$:

$$\Delta t_1 - \Delta t_2 \simeq \frac{L}{c}\left(\frac{v}{c}\right)^2.$$

Эта временная сдвижка приводит к

определённой интерференционной картине на экране. Если установку вращать, то разность времён $\Delta t_1 - \Delta t_2$ будет меняться и интерференционная картина также изменится. Однако на опыте никаких изменений обнаружено не было. Если допустить, что случайно в данный момент $v = 0$, то через полгода Земля изменит скорость своего орбитального движения на противоположную и эффект должен быть обнаружен (скорость орбитального движения Земли относительно Солнца $v_З \simeq 30 \frac{км}{с}$).



Этот опыт повторялся в разных вариациях, однако всякий раз с отрицательным результатом. Попытки модифицировать представления об эфире (эфир "увлекается Землёй") противоречат другим астрономическим наблюдениям (аберрация света). Все это в конце концов привело к отказу от теории эфира и в науку было введено новое фундаментальное понятие электромагнитного поля как новой разновидности материи. Электромагнитное поле (свет как частный случай) может распространяться в вакууме без всякого дополнительного носителя.

В дальнейшем опыты с интерференцией света от звезд показали, что скорость света не зависит от скорости источника или приёмника и равна С в ∀ инерциальной системе отсчёта. Этот факт был принят в качестве постулата, который должен учитываться при построении математической модели любых явлений. Теперь обновлённый принцип относительности (А. Эйнштейна) звучит так:

1. Законы природы не позволяют различать инерциальные системы отсчёта.

То есть, никакие физические эксперименты не позволяют выделить какие-то преимущества одной инерциальной системы отсчёта перед любой другой.

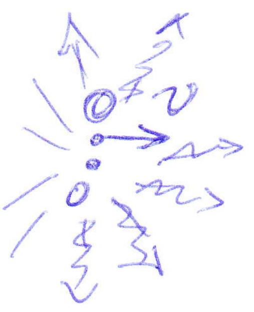
(2) Существует предельная скорость распространения сигналов, равная скорости света в вакууме:

$$c = 299\,792\,458 \text{ м/с}$$

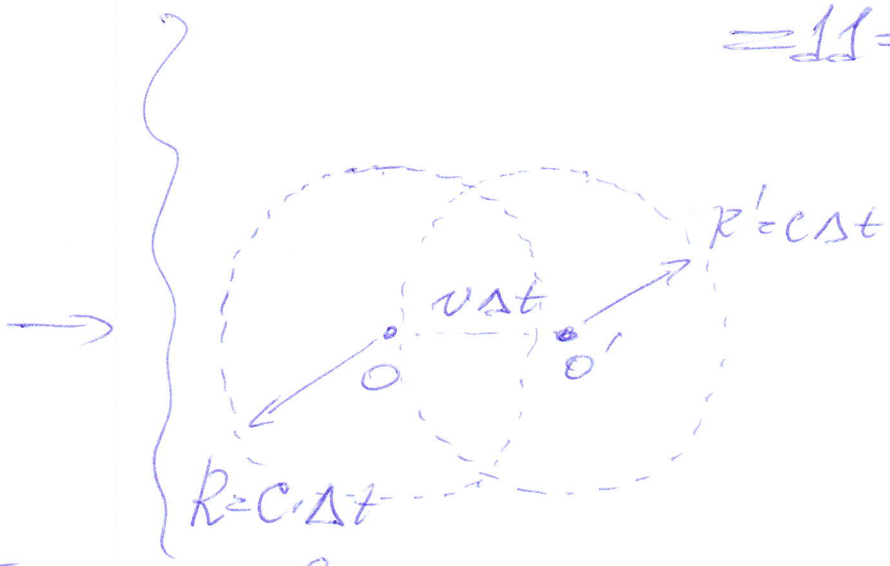
(Это точное значение, связанное с определением единицы длины – метра.)

Скорость света в вакууме равна c в <u>любой</u> инерциальной системе отсчёта.

Второй постулат не позволяет сохранить представление об абсолютном времени, которое во всех системах отсчёта течёт одинаково. В частности, приходится признать относительность понятия <u>одновременности событий</u>. Поясним это на таком мысленном эксперименте.



Вспышка света в момент, когда наблюдатели O и O' находились в одной точке пространства



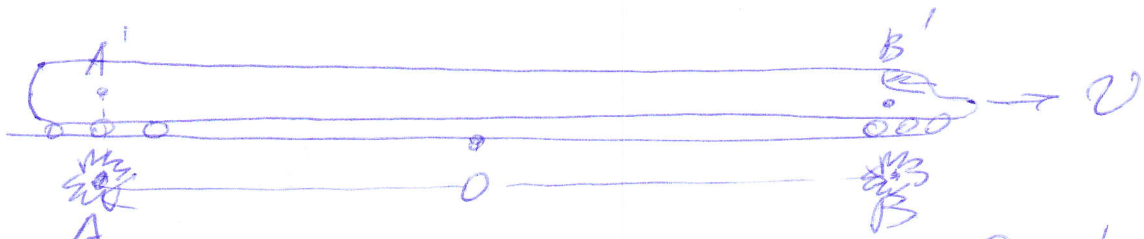
Ситуация спустя время Δt.

Наблюдатель O' движется относительно наблюдателя O со скоростью v. В момент, когда положения O и O' совпадали, происходит вспышка света в месте их нахождения. Через время Δt наблюдатель O зарегистрирует световой шар радиуса $R = c\Delta t$, поскольку свет относительно него распространяется с постоянной скоростью c во всех направлениях. Но наблюдатель O' придёт к такому же заключению, так как относительно него свет тоже распространяется с постоянной скоростью c во всех направлениях. В результате, одна и та же световая волна (её фронт) должна располагаться на сферах радиуса $R = R' = c\Delta t$ но с разными центрами, разнесёнными на расстояние $v\Delta t$.

Каков выход из этого противоречия? Как вообще наблюдатель О узнает, что волновой фронт расположен на сфере радиуса R? Для этого нужно, например, расположить на расстоянии R от наблюдателя О систему датчиков и устроить их так, чтобы при получении светового сигнала (волнового фронта) каждый датчик тут же посылал в О обратный световой сигнал, указывающий, что датчик сработал. Если наблюдатель О получит сигналы от всех датчиков одновременно (по своим часам), то это и будет означать, что волновой фронт – сфера с центром в т. О.

Для наблюдателя O' связанные с ним датчики находящиеся на расстоянии $R' = c\Delta t$ от него сработают неодновременно.

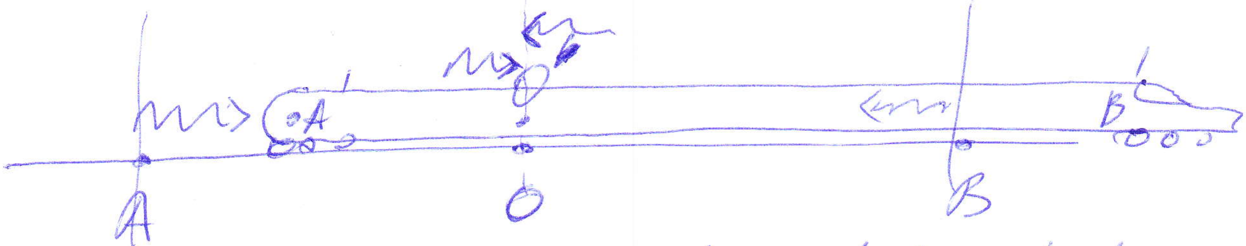
Другой мысленный эксперимент:



Неподвижный наблюдатель O разместил на равных расстояниях от себя в A и B ($OA = OB$) 2 источника света.

В момент $t = 0$ по часам набл. O и синхронизованным с этими часами в A и B происходят 2 вспышки света. Через $\Delta t = \frac{OA}{c} = \frac{OB}{c}$ 2 световых фронта придут к наблюдателю O и, поскольку $OA = OB$, наблюдатель O придёт к заключению, что источники в A и B действительно включились одновременно.

Но для наблюдателей в проходящем мимо поезде 2 волновых фронта соединятся в месте нахождения наблюдателя O'



Для наблюдателя O' $O'A' < O'B'$ $\Rightarrow$ он придёт к заключению, что свет из B' вышел <u>раньше</u> чем из A', так как скорость световых фронтов относительно поезда <u>тоже c</u> и для прохождения <u>бóльшего</u> расстояния $O'B'$ требуется бóльшее время, $\Rightarrow$ стартовать из B' нужно раньше.

Итак, с каждой <u>системой отсчёта</u> мы будем связывать (мысленно) набор часов, покоящихся в этой системе отсчёта и показывающих одинаковое время (синхронизованных).

Любое событие мы будем отмечать указанием его пространственных координат в данной системе отсчёта и момента t (по часам этой системы отсчёта), когда событие произошло. Эти 4 числа объединим в ~~таком~~ 4-вектор

$$x^\mu = (ct, \vec{x}) = (x^0, x^1, x^2, x^3).$$

$\boxed{\text{Зам}}$ По традиции временная компонента обозначается x^0 и равна ct, x^0 имеет ту же размерность (размерность длины), что и пространственные координаты.

Нашей ближайшей задачей будет нахождение связи 4-векторов координат <u>одного и того же</u> события, но с точки зрения разных систем отсчёта: O и O'.

Будем полагать, что координаты некоторого события, регистрируемого наблюдателями O и O' связаны линейным преобразованием:

$$x'^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu. \quad (\star)$$

Здесь 4×4 вещественная матрица $\Lambda = \|\Lambda^\mu{}_\nu\|$ и 4-вектор a^μ зависит от свойств системы отсчёта O'.

Выбор линейных преобразований является простейшим вариантом, обеспечивающим следующие требования:

1) В нерелятивистском пределе (когда скорость системы отсчета O' много меньше скорости c) мы должны получить преобразования Галилея, которые линейны

2) Преобразования $x \mapsto x'$ должны переводить последовательность эквидистантных и равноотстоящих по времени событий в такую же эквидистантную цепочку событий в новой системе отсчета, иначе у нас будет возможность различать системы O и O'.

Рассмотрим пару событий:

A: испускание луча света в момент t_A в точке $\vec{x}_A$.

B: поглощение этого луча в момент t_B в точке $\vec{x}_B$.

В системе O' эта же пара событий задаётся четырёх-векторами

x'^{μ}_A и x'^{μ}_B.

Поскольку скорость света в системах O и O' одинакова, то

$$C = \frac{|\vec{x}_A - \vec{x}_B|}{t_A - t_B} = \frac{|\vec{x}'_A - \vec{x}'_B|}{t'_A - t'_B} \Rightarrow$$

Вводя разность $\Delta x^\mu = x^\mu_B - x^\mu_A$ получим: $(\Delta x^0)^2 - (\Delta x^1)^2 - (\Delta x^2)^2 - (\Delta x^3)^2 = 0$ и то же для $\Delta x'^\mu$: $(\Delta x'^0)^2 - \sum\limits_{i=1}^{3}(\Delta x'^i)^2 = 0$.

В силу формулы (A), имеем связь:

$$\Delta x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \Delta x^\nu$$

$\boxed{\text{Зам}}$ Мы ввели Эйнштейновское правило суммирования: по повторяющимся разновысоким индексам подразумевается суммирование по всей области их значений:

$$\sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu := \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$$

(т.е. знак $\sum\limits_{\nu=0}^{3}$ будем опускать). В связи с этим отметим, что поскольку индекс суммирования (или „немой" индекс) можно обозначать как угодно, то следующие выражения тождественно равны

$$\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \equiv \Lambda^\mu{}_\alpha x^\alpha \equiv \Lambda^\mu{}_\beta x^\beta \equiv \ldots,$$

ибо все они обозначают сумму 4х слагаемых:

$$\Lambda^\mu{}_\nu X^\nu = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^\mu{}_\nu X^\nu = \Lambda^\mu{}_0 X^0 + \Lambda^\mu{}_1 X^1 + \Lambda^\mu{}_2 X^2 + \Lambda^\mu{}_3 X^3.$$

Чтобы увидеть, какие ~~свойства~~ ограничения на матрицы Λ возникают из ~~равенства~~ инвариантности выражения $(\Delta x^0)^2 - \sum_{i=1}^{3} (\Delta x^i)^2$ введем метрический тензор $g = \|g_{\mu\nu}\|$

$$\|g_{\mu\nu}\| = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1).$$

т.е. $g_{\mu\nu} = \begin{cases} 0 & \mu \neq \nu \\ 1 & \mu = \nu = 0 \\ -1 & \mu = \nu = 1, 2, 3. \end{cases}$

Тогда

$$(\Delta x^0)^2 - (\Delta x^1)^2 - (\Delta x^2)^2 - (\Delta x^3)^2 = \Delta x^\mu \Delta x^\nu g_{\mu\nu}$$

(суммирование по μ и ν!)

$\boxed{O}$ $\Delta S^2 = g_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu$ — квадрат интервала между событиями.

Для процесса распространения света наши постулаты дают

$$\Delta x^\mu \Delta x^\nu g_{\mu\nu} = \Delta x'^\mu \Delta x'^\nu g_{\mu\nu} = 0.$$

Распространим это требование на квадрат интервала между любыми событиями.

То есть, если в системе O пара событий описана 2 четыре-векторами x_A^μ и x_B^μ, то в системе O' координаты $x_A'^\mu$ и $x_B'^\mu$ будут такими, что квадраты интервалов будут одинаковы:

$$\boxed{\Delta S^2 = \Delta x^\mu \Delta x^\nu g_{\mu\nu} = \Delta x'^\mu \Delta x'^\nu g_{\mu\nu} = \Delta S'^2}$$

Но поскольку $\Delta x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\alpha \Delta x^\alpha$, то в силу произвольности Δx^μ:

$$\Delta S^2 - inv \Longleftrightarrow \boxed{\Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta g_{\mu\nu} = g_{\alpha\beta}}$$

Переписывая это в виде произведение матриц $\Lambda = \| \Lambda^\mu{}_\nu \|$ и $g = \| g_{\mu\nu} \|$ получим эквивалентную запись:

$$(*) \quad \boxed{\Lambda^T g \Lambda = g}$$

Λ^T – транспонированная матрица.

Беря детерминант от этого матричного равенства, получим $(\det \Lambda)^2 = 1$.
Таким образом, наше преобразование $\Delta x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} \Delta x^{\nu}$ обратимо.

Учитывая $g = g^T = g^{-1}$ (из явного вида g) получаем:

$$(\Lambda^{-1})^T g \Lambda^{-1} = g,$$

то есть Λ^{-1} тоже преобразование вида (*).
И произведение (композиция преобразований) $\Lambda_1 \cdot \Lambda_2$ тоже принадлежит множеству (*). $\Rightarrow$
Такие преобразования образуют группу, называемую группой Лоренца (или группой $O(1,3)$ по виду квадратичной формы от координат Δx^{μ}, сохраняемой этой группой).

Четырёхмерное пространство событий с координатами x^μ и метрикой $g_{\mu\nu}$ называется пространством <u>Минковского</u>.

На следующем занятии мы рассмотрим кратко свойства группы Лоренца и приведем важные явные примеры преобразований Λ.