Элементы дифференциальной геометрии

В этой лекции мы напомним основные понятия и конструкции анализа на многообразиях необходимые для введения гамильтонова формализма.

1 Гладкие многообразия

Неформально многообразием M называется *то, что "локально устроено как евклидово пространство"*, то есть, можно считать, что в окрестности всякой точки $\mathbf{m} \in M$ имеются локальные координаты $(q^1, \cdots, q^n)$, с нулём в $\mathbf{m}$ (очевидно не единственные). Стандартное строгое определение оперирует понятием *класса эквивалентности атласов* можно найти в любой книге по дифференциальной геометрии. Ещё один менее формальный, но относительно более наглядный способ предлагает смотреть на структуру гладкого многообразия как на правило или способ задавания множества всех гладких функций на нём – функция гладкая в окрестности точки $\mathbf{m}$ в каких-либо координатах какого-либо атласа должна быть гладкой в окрестности $\mathbf{m}$ во всех других картах этого и всех прочих атласов, покрывающих точку $\mathbf{m}$.

1.1 (Ко)касательные вектора, пространства и расслоения

Понятие касательного вектора к точке $\mathbf{m}$ многообразия M обобщает известные из матанализа понятия вектора скорости параметризованной кривой в $\mathbb{R}^n$ и производной по направлению в $\mathbb{R}^n$. Как мы видели, задание на M структуры гладкого многообразия позволяет корректно определить понятие гладкой функции на M. Основным свойством и характеристикой дифференцируемых (а значит и гладких) отображений является возможность локально приближать их линейными. При этом, в случае евклидова аффинного пространства $\mathbb{R}^n$ соответствующее линейное отображение действует на векторном пространстве $V^n \simeq \mathbb{R}^n$ приложенном к точке x, окрестность которой мы рассматриваем. Пространство V^n в этом случае называется касательным к $\mathbb{R}^n$ в точке x, а линейное отображение индуцированное на нём гладким отображением $\mathbb{R}^n$ дифференциалом. Эту конструкцию можно перенести и на случай гладких многообразий. Приведём три эквивалентных определения касательного вектора:

Определение 1. *Касательным вектором v в точке $\mathbf{m}$ многообразия M называется*

- *Отнесённый к системе координат* $(q^1, \cdots, q^n)$ *набор* $(v^1, \cdots, v^n)$, *меняющийся при переходе к координатам* $(\widetilde{q}^1, \cdots, \widetilde{q}^n)$ *по правилу*

$$\widetilde{v}^i = \frac{\partial \widetilde{q}^i}{\partial q^j} v^j$$

- *Класс эквивалентности гладких кривых* $\gamma_v : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$

- *Дифференцирование алгебры (вообще говоря ростков) гладких в* $\mathbf{m}$ *функций, то есть, линейное отображение* $v : C^\infty_{\mathbf{m}}(M) \to \mathbb{R}$, *удовлетворяющее правилу Лейбница.*

Множество всех векторов v, касательных к M в точке $\mathbf{m}$ очевидно образует векторное пространство, обозначаемое $\mathrm{T}_{\mathbf{m}}M$. Всякие координаты $(q^1, \cdots, q^n)$ на M в окрестности $\mathbf{m}$ задают (по третьему определению) на $\mathrm{T}_{\mathbf{m}}M$ базис, состоящий из элементов

$$\partial_{q^i}\Big|_{\mathbf{m}} = \frac{\partial}{\partial q^i}\Big|_{\mathbf{m}}$$

Упражнение: *Найдите кривые и наборы чисел, задающие этот базис в первом и втором определении касательных векторов.*

Как и для всякого векторного пространства, для $\mathrm{T}_{\mathbf{m}}M$ определено двойственное пространство $(\mathrm{T}_{\mathbf{m}}M)^*$, традиционно обозначаемое $\mathrm{T}^*_{\mathbf{m}}M$, состоящее из линейных функционалов на $\mathrm{T}_{\mathbf{m}}M$. Выбор координат $(q^1, \cdots, q^n)$ в окрестности $\mathbf{m}$ задаёт на $\mathrm{T}^*_{\mathbf{m}}M$, базис

$$dq^i\Big|_{\mathbf{m}} : \quad \left\langle dq^i\Big|_{\mathbf{m}}, \partial_{q^j}\Big|_{\mathbf{m}} \right\rangle = \delta^i_j$$

Структура гладкого многообразия на M задаёт структуры гладких многообразий и на объединениях $\bigcup_{\mathbf{m}\in M} \mathrm{T}_{\mathbf{m}}M$ и $\bigcup_{\mathbf{m}\in M} \mathrm{T}^*_{\mathbf{m}}M$. Получающиеся при объекты называются касательным $\mathrm{T}M$ и кокасательным T^*M расслоениями.

Упражнение: *Пусть* $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha\})\}$ *атлас на* M. *Найдите функции перехода между картами соответствующих ему атласов на* $\mathrm{T}M$ *и* T^*M.

Таким образом, точка $\mathrm{T}M$ это пара $(\mathbf{m}, v)$ где $\mathbf{m} \in M$, а $v \in \mathrm{T}_{\mathbf{m}}M$. Оператор проекции $\pi : \mathrm{T}M \to M$ отображает пару $(\mathbf{m}, v)$ в точку $\mathbf{m}$.

Определение 2. *(Гладкое) векторное поле* X *на* M *есть сечение векторного расслоения* $\mathrm{T}M$, *то есть, такое (гладкое) отображение* $X : M \to \mathrm{T}M$, *что* $\pi \circ X = \mathrm{id}$.

Сечение ω кокасательного расслоения называется дифференциальной 1-формой. Гладкие векторные поля и дифференциальные формы очевидно образуют модули над кольцом гладких функций. Если $(q^1, \cdots, q^n)$ координаты в окрестности $\mathbf{m}$, то поля $(\partial_{q^1}, \cdots, \partial_{q^n})$ и формы $(dq^1, \cdots, dq^n)$ являются базисными, всякое гладкое поле (форма) записывается через них с гладкими коэффициентами:

$$X = X^1(q)\partial_{q^1} + \cdots + X^n(q)\partial_{q^n}$$

Действие формы на векторное поле даёт гладкую функцию $\omega(X) = f$. Вектор поля X в точке $\mathbf{m}$ будем обозначать $X_{\mathbf{m}}$.

1.2 Поведение при отображениях

Всякое гладкое отображение F между гладкими многобразиями M и N естественным и очевидным образом индуцирует отображения соответствующих касательных и кокасательных пространств:

$$\begin{array}{rcl} F & : & M \to N \\ F_* & : & \mathrm{T}_{\mathbf{m}} M \to \mathrm{T}_{F(\mathbf{m})} N \\ F^* & : & \mathrm{T}^*_{F(\mathbf{m})} N \to \mathrm{T}^*_{\mathbf{m}} M \end{array}$$

где

$$\begin{array}{ll} [F_*(X)]\,(g) = [X]\,(g \circ F) & \forall X \in \mathrm{Vect}(M),\, g \in \mathrm{Func}(N) \\ [F^*(\omega)]\,(X) = [\omega]\,\big(F_*(X)\big) & \forall \omega \in \mathrm{Vect}^*(N),\, X \in \mathrm{Vect}(M) \end{array}$$

Отображение F_* также часто обозначают dF и называют дифференциалом, в случае $M = \mathbb{R}^m$, $N = \mathbb{R}^n$ оно в точности совпадает из известным понятием дифференциала в матанализе.

2 Дополнительные структуры

2.1 Скобка Ли векторных полей

Зададим бинарную операцию $[\cdot, \cdot]$ на векторных полях гладкого многообразия M следующим образом:

$$\begin{array}{rcll} [\cdot, \cdot] & : & \mathrm{Vect}(M) \times \mathrm{Vect}(M) \to \mathrm{Vect}(M) & \\ [X, Y](g) & = & [X]\big([Y](g)\big) - [Y]\big([X](g)\big), & \forall X, Y \in \mathrm{Vect}(M), g \in \mathrm{Func}(M) \end{array}$$

Упражнение:*Проверьте, что скобка Ли двух векторных полей действительно является векторным полем, то есть, дифференцированием и подтвердите следующие её свойства:*

1. $[X, Y] = -[Y, X]$
2. $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$
3. $[f \cdot X, g \cdot Y] = f \cdot g \cdot [X, Y] + f \cdot (Xg) \cdot Y - g \cdot (Yf) \cdot X$

Векторное пространство, например, $\mathrm{Vect}(M)$ снабжённое бинарной операцией, удовлетворяющей первым двум из перечисленных свойств называется алгеброй Ли.

2.2 Внешнее произведение и дифференциальные k-формы

Из двух 1-форм ω_a, ω_b с помощью операции внешнего умножения $\wedge$ можно составить 2-форму – Объект, который из двух векторных полей делает одну функцию, кососимметричный по подаваемым в него полям:

$$\omega_a \wedge \omega_b(X, Y) = \omega_a(X) \cdot \omega_b(Y) - \omega_b(Y)\omega_a(X)$$

Аналогичным образом определяются дифференциальные $k-$формы как объекты, переводящие упорядоченные наборы из k векторных полей в функции на многообразии, кососимметричные по входящим в набор полям. Множество дифференциальных k-форм на M обозначается $\Omega^k(M)$ или $\Lambda^k(M)$. Всякая $k-$форма ω очевидно допускает представление в виде

$$\omega = \sum_{1\leqslant i_1<\dots<i_k\leqslant n} a_{i_1,\dots,i_k}(x)\cdot dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}$$

Внешнее произведение $k-$ и $l-$форм определяется прямым обобщением:

$$\omega_a\wedge\omega_b(X_1,\dots,X_{k+l}) = \sum_{\sigma\in S_{k+l}}(-1)^{\sigma}\omega_a(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(k)})\omega_b(X_{\sigma(k+1)},\dots,X_{\sigma(k+l)})$$

Внешнее произведение очевидным образом ассоциативно и дистрибутивно, коммутационное же соотношение имеет вид

$$\omega_a\wedge\omega_b = (-1)^{\deg(\omega_a)\cdot\deg(\omega_b)}\omega_b\wedge\omega_a$$

2.3 Внешнее дифференцирование и внутреннее произведение

Внешнее дифференцирование $k-$форм имеет несколько эквивалентных инвариантных определений. Время, требуемое на детальное знакомство с ними неадекватно нашим практическим потребностям и возможностям, поэтому мы воспользуемся координатным определением. Зададим внешнее дифференцирование d на Ω^k как линейный оператор $\Omega^k\to\Omega^{k+1}$ действующий на мономах следующим образом:

$$d\big(a_{i_1,\dots,i_k}(x)\cdot dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}\big) = \sum_{1\leqslant j\leqslant n}\partial_j\big(a_{i_1,\dots,i_k}(x)\big)\cdot dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}$$

Упражнение: *Проверьте:* $d^2=0$ *и* $d(\omega_a\wedge\omega_b) = d\omega_a\wedge\omega_b+(-1)^{\deg\omega_a}\omega_a\wedge d\omega_b$

Цепочка

$$\dots \xrightarrow{d} \Omega^{k-1} \xrightarrow{d} \Omega^k \xrightarrow{d} \Omega^{k+1} \xrightarrow{d} \dots$$

называется (дифференциальным) комплексом де Рама. В каждом Ω^k лежат замкнутые ($\ker d$) и точные ($\operatorname{Im} d$) формы. В силу $d^2=0$ все точные формы являются замкнутыми. Локально верно и обратное утверждение (лемма Пуанкаре) – определённая в шаре замкнутая форма является в нём и точной. Глобально утверждение очевидно неверно – форма $d\varphi$ на плоскости не является точной, интеграл её по замкнутому контуру не равен нулю.

Для всякого векторного поля $X\in\operatorname{Vect}(M)$ можно определить линейную операцию $\imath_X$ действующую на дифференциальных формах подстановкой поля X на место первого аргумента формы: $\imath_X(\omega)(Y_1,\dots,,Y_{k-1}) = \omega(X,Y_1,\dots,Y_{k-1})$, что даёт цепочку

$$\dots \xleftarrow[\imath_X]{} \Omega^{k-1} \xleftarrow[\imath_X]{} \Omega^k \xleftarrow[\imath_X]{} \Omega^{k+1} \xleftarrow[\imath_X]{} \dots$$

связь между двумя построенными цепочками даётся формулой Картана для производной Ли.

2.4 Потоки векторных полей и производная Ли

Всякое гладкое векторное поле X на многообразии M порождает однопараметрическую группу диффеоморфизмов $X_t : M \to M$, также называемую потоком поля X. В произвольных координатах q на M преобразование потока за время t имеет вид

$$X_t(\mathbf{m}) = q(t),\ \text{где } q(t) \text{ решение задачи Коши } \left\{ \begin{array}{l} \dot{q}(t) = X_{q(t)} \\ q(0) = \mathbf{m} \end{array} \right.$$

По теореме существования и единственности ОДУ через всякую точку $\mathbf{m} \in M$ проходит интегральная кривая поля X и значит, преобразование потока для $\mathbf{m}$ корректно определено по крайней мере для достаточно малых по модулю $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Более того, по той же самой теореме (здесь удобнее использовать альтернативную формулировку о выпрямлении векторного поля) преобразование это будет диффеоморфизмом в некоторой окрестности $\mathbf{m}$. Конечно же, для того чтобы преобразование потока существовало при всех $t \in \mathbb{R}$ и было диффеоморфизмом на всём M нужны некоторые дополнительные требования на X и M. Подробности мы приводить не будем, заметим только, что наиболее распространённым достаточным условием является компактность многообразия M.

Следствием существования преобразования потока является возможность дифференцировать функции, векторные поля, формы, и вообще произвольные тензорные поля на M по направлению гладкого векторного поля X. Конструкция является элементарным обобщением используемой в матанализе производной по направлению. Производная по направлению поля X Называется производной Ли и обозначается $\mathcal{L}_X$.

Для скалярных функций $f : M \to \mathbb{R}$ производная Ли определяется элементарно:

$$\mathcal{L}_X f = \lim_{t \to 0} \frac{f \circ X_t - f}{t} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f \circ X_t$$

и как видно из определения буквально совпадает с обычной производной по направлению, то есть действием поля X на функцию f:

$$\mathcal{L}_X f = Xf$$

Для производной векторного поля $Y : M \to \mathrm{T}M$ определение придётся подправить, проблема в том, что образы отображений $Y \circ X_t$ и Y априори лежат в разных касательных пространствах $\mathrm{T}_{X_t(\mathbf{m})}M$ и $\mathrm{T}_{\mathbf{m}}M$ и их невозможно вычитать друг из друга. Предварительно следует перенести первый из векторов в “исходное” пространство $\mathrm{T}_{\mathbf{m}}M$, сделать это несложно, переносить касательные пространства мы уже умеем, для этого нам нужен дифференциал какого-нибудь отображения, переводящего точку $X_t(\mathbf{m})$ в точку $\mathbf{m}$. Естественный кандидат на эту должность преобразование потока X_{-t}. Получаем (в данном случае векторное поле $\mathcal{L}_X Y$ удобно описывать через его действие на произвольную гладкую функцию f):

$$\mathcal{L}_X Y f = \lim_{t\to 0} \frac{dX_{-t}\big(Y \circ X_t\big) - Y}{t} f = \Big\{ \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \big(dX_{-t}(Y \circ X_t)\big) \Big\} f =$$
$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Big\{ Y \circ X_t(f \circ X_{-t}) \Big\} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \Big(f \circ X_{-t} \circ Y_s \circ X_t \Big) =$$
$$= \frac{\partial^2}{\partial_t \partial_s}\Big|_{(0,0)} \big(f \circ X_{-t} \circ Y_s \circ X_t \Big)$$

Если теперь провести дифференцирование в явном виде, то оно даст

$$\mathcal{L}_X Y f = [X, Y] f$$

Упражнение:*Получите этот же результат более элементарным способом проведя вычисление в координатах – найдите члены первого по порядка в разложении в ряд по t*

$$Y^1(q + Xt)\frac{\partial}{\partial(q^1 + X^1 t)} + \cdots + Y^n(q + Xt)\frac{\partial}{\partial(q^n + X^n t)}$$

Производная Ли для 1-форм определяется аналогично, только для переноса кокасательных пространств используется X^*_{-t} вместо dX_{-t}.

Упражнение:*Дайте формальное определение производной Ли для тензорного поля типа (r, s).*

В дальнейшем для доказательства теоремы Дарбу нам потребуется формула Картана, описывающее действие производной Ли на k-формы:

$$\mathcal{L}_X = \imath_X \circ d + d \circ \imath_X$$

Идея её доказательства – проверяем, что правая и левая части являются дифференцированиями, коммутируют с оператором d и одинаково действуют на Ω^0, затем показываем, что этими свойствами объект определяется однозначно.

3 Римановы и симплектические многообразия

Более содержательная нелокальная внутренняя жизнь на многообразиях при наличии на них дополнительных структур. Самые известные и простейшие примеры это римановы и симплектические многообразия.

3.1 Римановы многообразия

Риманово многобразие (M, g) это пара из гладкого многообразия M и гладкого поля g билинейных симметричных положительно определённых форм $\sum g_{ij}(q) dq^i dq^j$. Основные выгоды от его существования – придание смысл понятию длины кривой $q(t)$ на M и возможность опускания-поднимания индексов у тензорных полей на M. Примеры римановых многообразий – обычное $\mathbb{R}^n$ и его подмногообразия с индуцированными вложением в $\mathbb{R}^n$ метриками.

Как известно из линейной алгебры, в произвольной точке $\mathbf{m} \in M$ билинейную форму g можно привести к главным осям, то есть заменой координат диагонализовать матрицу $g_{ij}(\mathbf{m})$ билинейной формы g на $\mathrm{T}_{\mathbf{m}} M$.

Этот нормальный вид существенно локальный, даже если метрику g удаётся диагонализовать не только в точке $\mathbf{m}$, но и в некоторой её окрестности, то коэффициенты, стоящие на диагонали не будут постоянными, ведь они, как известно, отвечают за кривизны многообразия M в соответствующих точках. По сути это означает, что с точки зрения внутренней геометрии многообразия M его точки могут быть “неодинаковыми” и иметь отличающиеся по своему строению окрестности. Симплектические многообразия в этом отношении устроены гораздо проще.

3.2 Симплектические многообразия

Симплектическое многообразие (M, ω) это пара из гладкого многообразия M и гладкой замкнутой невырожденной дифференциальной 2-формы ω на нём. Как всякая 2-форма локально ω имеет вид

$$\omega = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \omega_{ij}(q) dq^i \wedge dq^j$$

Упражнение: *Покажите, что невырожденность формы ω эквивалентна условию* $\det\bigl(\omega_{ij}(q)\bigr) \neq 0$

Из невырожденности ω следует во-первых чётномерность многообразия M, и невырожденность n-ой внешней степени $\omega \wedge \cdots \wedge \omega$ на $2n$-мерном многобразии M, то есть, существование знакопостоянной формы объёма на M.

Примером симплектического многообразия является $(\mathbb{R}^2, dx \wedge dy)$. Другой важный пример кокасательное расслоение T^*M произвольного гладкого многообразия M. Покажем, что на T^*M существует каноническая невырожденная 1-форма α такая, что $d\alpha$ тоже невырождена. 1-форма на T^*M должна брать касательный вектор к T^*M и делать из него число. Точка T^*M это пара $(\mathbf{m}, p)$, где $\mathbf{m} \in M$, $p \in \mathrm{T}^*_{\mathbf{m}}M$. Следовательно, касательный вектор к T^*M это пара (v, w) где v вектор касательный к M в $\mathbf{m}$, а w вектор, касательный к p в $\mathrm{T}^*_{\mathbf{m}}M$. Так как $\mathrm{T}^*_{\mathbf{m}}M$ является векторным пространством, то касательным к нему служит оно само, $w \in \mathrm{T}^*_{\mathbf{m}}M$. Теперь можно определить форму α как отображение, делающее из вектора (v, w) касательного к $(\mathbf{m}, p)$ число $\langle p, v\rangle$. В локальных на T^*M координатах q, p, где q координаты на M, а p отвечают за кокасательные компоненты форма α имеет вид $\alpha = pdq = \sum p_i dq^i$. Невырожденность и замкнутость $d\alpha = dp_i \wedge dq^i$ очевидны.

3.3 Теорема Дарбу

Теорема Дарбу описывает локальный нормальный вид произвольной симплектической формы на M.

Теорема 1. *В окрестности любой точки* $\mathbf{m}$ *симплектического многообразия* (M, ω) *существуют координаты* $(q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p^n)$ *в которых*

$$\omega = dp_1 \wedge dq^1 + \cdots + dp_n^d q^n$$

Доказательство. Как мы знаем из линейной алгебры, по крайней мере в одной точке $\mathbf{m}$ переходом к новым координатам (q, p) форму можно привести к требуемому нормальному виду: $\omega\Big|_{\mathrm{T}_{\mathbf{m}}M} = \sum dp_i \wedge dq^i$. Обозначим через $\omega_0 = \sum dp_i \wedge dq^i$ определённую в окрестности $\mathbf{m}$ 2-форму, очевидно замкнутую и совпадающую на $\mathrm{T}_{\mathbf{m}}M$ с исходной формой ω. Так как обе формы ω и ω_0 замкнуты, то локально, в достаточно малой окрестности $\mathbf{m}$ они точны, и значит, в этой окрустности существует 1-форма β такая что $d\beta = \omega - \omega_0$. Определим теперь для $t \in [0,1]$ дифференциальную 2-форму на $M \times [0,1]$:

$$\Omega(p,q,t) = t\omega_0 + (1-t)\omega + \beta \wedge dt$$

Так как $d\Omega = dt \wedge \omega_0 - dt \wedge \omega + d\beta \wedge dt = 0$, то Ω локально замкнута, а значит и точна. Так как $M \times [0,1]$ нечётномерно, то ω вырождена, как и любая другая 2-форма на нём. Следовательно, существует такое векторное поле X на $M \times [0,1]$ (очевидно, с нигде не занулющейся t-компонентой) что $\imath_X \Omega = 0$. Так как зануление формы определяется направлением поля и не зависит от длины его векторов, то поле можно считать отнормированным: $dt(X) = 1$. Посмотрим, что делает поток векторного поля X_t с 2-формой Ω. Замечаем, что $\Omega_0 = \Omega\Big|_{M\times 0} = \omega$, и $\Omega_1 = \Omega\Big|_{M\times 1} = \omega$. Применяем формулу Картана:

$$\mathcal{L}_X \Omega = d \circ \imath_X \Omega + \imath_X \circ d\Omega = 0$$

Видим, что преобразование потока переводит форму Ω_1 в Ω_0, и следовательно, ω в ω_0. Следовательно, преобразование потока за время 1 и будет давать требуемую замену координат в окрестности $\mathbf{m}$ $\square$

Теорема Дарбу показывает, что локально, в отличие от римановых многообразий все точки симплектического многообразия (M,ω) “одинаковы” с точки зрения внутренней геометрии. Более того, локально “одинаковы” все точки всех симплектических многообразий фиксированной размерности, так как в силу теоремы Дарбу локально всякое симплектическое многообразие (M,ω) является кокасательным расслоением к некоторому многообразию N.